

Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи
и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 621.454.2

Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-364-376

For citation: Zuev A. A., Arngold A. A., Khodenkova E. V. Heat transfer in the centrifugal force field for gas turbines elements. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, Vol. 21, No. 3, P. 364–376. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-364-376

Для цитирования: Зуев А. А., Арнгольд А. А., Ходенкова Э. В. Теплоотдача в поле центробежных сил для элементов газовых турбин // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 3. С. 364–376. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-364-376

HEAT TRANSFER IN THE CENTRIFUGAL FORCE FIELD FOR GAS TURBINES ELEMENTS

A. A. Zuev^{1*}, A. A. Arngold², E. V. Khodenkova¹

¹Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

²JSC “Krasnoyarsk machine-building plant”
29, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660123, Russian Federation

*E-mail: dla2011@inbox.ru

The study of heat transfer from combustion products (CP) to the impeller and the casing of gas turbines of liquid rocket engines (LRE) is an urgent task. The solution of the flow problem, taking into account heat transfer, in rotational flows, in the flowing parts of the turbopump units (TPU) of the rocket engine, is carried out by the following methods: numerical methods; analytical approach, when solving the equations of dynamic and temperature boundary layers; as well as using empirical dependencies. The temperature parameter of the gaseous combustion products and, as a consequence, the heat exchange between the combustion products and the structural elements of the flow part, significantly affects the working and energy characteristics of the TPU LRE. When designing gas turbines of LRE, it is necessary to take into account the presence of heat exchange processes, the working fluid temperature distribution and the structural element temperatures in the cavities of the TPU LRE (since energy losses and viscosity depend on the temperatures of the working fluid, and also determine the flow parameters). The temperature distribution in the structural elements determines the performance and reliability of the unit. In the case of the use of cryogenic fuel components in the TPU LRE units the heating of the component leads to the implementation of cavitation modes and a drop in operating and energy characteristics. On the other hand, a lowered temperature of the working fluid leads to an increased viscosity of the components and, as a consequence, a decrease in the efficiency of the unit (especially when using gel-like components). When studying heat transfer in the field of centrifugal forces for elements of rocket engine gas turbines it is necessary to obtain a joint solution of the equations of dynamic and temperature boundary layers in the boundary conditions of the flow parts. This article offers a model of the distribution of dynamic and temperature boundary layers taking into account the convective component (for the case of a gaseous working fluid, i. e. $Pr < 1$), which is necessary for the analytical solution and determination of the heat transfer coefficient in the boundary conditions of the flow cavities of the LRE turbine. The energy equation has been analytically obtained for the boundary conditions of the temperature boundary layer, which allows integration over the surface of any shape, which is necessary in determining the thickness of the energy loss. Taking into

account the integral relation, the heat transfer law of the turbulent boundary layer for the rotation cavities is written. The equations for determining the heat transfer coefficient in the form of the Stanton criterion for rectilinear uniform and rotational flows for cases of turbulent flow regimes were obtained analytically. The obtained equations for heat transfer coefficients are in good agreement with experimental data and dependences of other authors.

Keywords: heat transfer coefficient, temperature boundary layer, turbopump unit, power parameters, turbine.

ТЕПЛООТДАЧА В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГАЗОВЫХ ТУРБИН

А. А. Зуев^{1*}, А. А. Арнгольд², Э. В. Ходенкова¹

¹Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, г. Красноярск, 660037, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

²АО «Красноярский машиностроительный завод»
Российская Федерация, 660123, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 29

*E-mail: dla2011@inbox.ru

Исследование теплоотдачи от продуктов сгорания (ПС) к рабочему колесу и корпусу газовых турбин жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) является актуальной задачей. Решение задачи течения с учетом теплообмена при вращательных течениях в проточных частях турбонасосных агрегатов (ТНА) ЖРД осуществляется следующими способами: численными методами, аналитическим подходом при решении уравнений динамического и температурного пограничных слоев, а также с использованием эмпирических зависимостей. Параметр температуры газообразных ПС и, как следствие, теплообмен между ПС и конструктивными элементами проточной части значительно влияет на рабочие и энергетические характеристики ТНА ЖРД. При проектировании газовых турбин ЖРД необходимо учитывать наличие теплообменных процессов, распределение температур рабочего тела и температур конструктивных элементов в полостях ТНА ЖРД (так как энергетические потери и вязкость зависят от температур рабочего тела, а также определяют параметры течения). Распределение температур в конструктивных элементах определяют работоспособность и надежность агрегата. В случае применения криогенных компонентов топлива в агрегатах подачи ТНА ЖРД, подогрев компонента приводит к реализации кавитационных режимов и падению рабочих и энергетических характеристик. С другой стороны, пониженная температура рабочего тела приводит к повышенной вязкости компонентов и снижению КПД агрегата (особенно при использовании гелеобразных компонентов). При исследовании теплоотдачи в поле центробежных сил для элементов газовых турбин ЖРД необходимо получить совместное решение уравнений динамического и температурного пограничных слоев в граничных условиях проточных частей. Предложена модель распределения динамического и температурного пограничных слоев с учетом конвективной составляющей (для случая газообразного рабочего тела, т. е. $Pr < 1$), необходимая для аналитического решения и определения коэффициента теплоотдачи в граничных условиях проточных полостей турбины ЖРД. Аналитически получено уравнение энергии для граничных условий температурного пограничного слоя, позволяющего вести интегрирование по поверхности любой формы, необходимое при определении толщин потери энергии. С учетом интегрального соотношения записан закон теплообмена турбулентного пограничного слоя для полостей вращения. Аналитическим путем получены уравнения для определения коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона для прямолинейного равномерного и вращательных течений для случаев

турбулентных режимов течения. Полученные аналитические уравнения для коэффициентов теплоотдачи хорошо согласуются с экспериментальными данными и зависимостями других авторов.

Ключевые слова: коэффициент теплоотдачи, температурный пограничный слой, турбонасосный агрегат, энергетические параметры, турбина.

Введение. Учет особенностей теплоотдачи в проточных частях турбонасосных агрегатов (ТНА) жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) является актуальной задачей. В настоящее время учет особенностей течения с теплоотдачей при реализации потенциального и вихревого вращательного течения в проточных частях в основном осуществляется следующими методами: использованием эмпирических уравнений, численными и аналитическими методами решения дифференциальных уравнений в частных производных [1].

Первый метод не всегда обеспечивает требуемую точность расчета гидродинамических и тепловых характеристик вращательных течений с учетом теплоотдачи и требует дополнительных уточняющих экспериментальных исследований. Как правило это влечет достаточно большие временных и материальных затрат на постановку и проведение исследований.

Численные методы достаточно сложны в использовании при проведении инженерных расчетов и требуют реализации их в специализированном программном обеспечении. Численные методы исследования используют прямое численное моделирование (метод DNS) и усредненные уравнения Навье-Стокса и Рейнольдса (RANS метод). Выбор метода зависит от сложности проблемы и точности результатов. Достаточно часто используется метод RANS с использованием моделей k - ϵ и k - ω турбулентности [2–7]. Вопросы теплоотдачи при обтекании криволинейной поверхности с продольной кривезной газообразным потоком рабочего тела так же рассмотрены в работах [8–10], где исследованы случаи обтекания лопаток турбин. В работе [11] исследуется конвективный теплообмен в канале с периодическими выступами на основе многоблочных вычислительных технологий, основанных на решении факторизованным конечно-объемным методом уравнений Рейнольдса, замыкаемых с помощью модели переноса сдвиговых напряжений Ментера, и уравнения энергии на разномасштабных пересекающихся структурированных сетках.

Аналитический метод позволяет получить аналитические зависимости применимые для инженерных расчетов в широком диапазоне возможных вариаций конструктивных и режимно-эксплуатационных параметров. Аналитические методы, как правило разрабатывались для прямолинейного равномерного течения и имеет ряд ограничений. Одно из ранних исследований это работа Е. Л. Кнута [12], в которой анализ основан на расширенной аналогии Рейнольдса с передачей тепла, массы и импульса в развитом турбулентном потоке в трубе. Использование профиля распределения скорости и температуры в пограничном слое предложено В. Д. Ранни [13] и модифицировано Д.Л. Туркоттом [14]. Анализ подслоя, проведенный Туркоттом, учитывал влияние теплообмена на турбулентность. Аналитические методы определения коэффициентов теплоотдачи предложенные в работах [15; 16] учитывает конвективный перенос тепла в камерах ЖРД и выполнены для прямолинейного турбулентного течения. Одномерная аналитическая модель, для докритических условий, так же предложена С. Р. Шайном [17].

Особенности конструкции турбин ТНА ЖРД и объект исследования. При проектировании диаметр турбины ТНА ЖРД выбирается с учетом компоновки и обеспечения минимальных габаритов и лимитируется прочностью ротора турбины. Из анализа адиабатной работы известно, что при выбранном рабочем теле наибольшая величина адиабатной работы достигается при высоких температурах и больших отношениях давлений.

Применение высоких температур ограничивается работоспособностью конструкции. В ЖРД применяются неохлаждаемые турбины. Из-за конструктивных особенностей и применяемых материалов температура рабочего тела перед неохлаждаемой турбиной ограничивается, как правило, для восстановительного газа 1000–1200 °С, для окислительного газа 700–900 °С. Чем большую температуру перед турбиной можно допустить, тем меньше должно быть давление перед турбиной. Из-за особенностей конструкции турбины ЖРД выполняют одноступенчатыми и реже двухступенчатыми.

Высокие температуры рабочего тела приводят к температурным деформациям, в том числе и дисков турбин [18]. При проектировании проточных частей узлов и агрегатов ТНА ЖРД необходимо учитывать изменение температуры потока рабочего тела по длине рабочего канала, так как параметр вязкости является функцией температуры и определяет режим течения и как следствие потери, в частности дисковое трение и гидродинамические потери в проточной части.

Оптимальный уровень стабильности энергетических параметров турбонасосных агрегатов (ТНА) обеспечивается в процессе опытно-конструкторских работ путем корректировки геометрических размеров деталей и сборочных единиц газодинамического тракта, выбора технологических схем размерной обработки, сборки и испытаний турбин с привлечением значительного объема статического материала. В связи с этим моделирование энергетических параметров ТНА ЖРД, представляет актуальную научно-техническую задачу. Вопросы оптимизации параметров рабочего процесса и математическая модель ДУ рассмотрены в работе В. А. Григорьева [19], где проведен анализ моделей и раскрыты преимущества и недостатки для различных этапов проектирования.

При проектировании требования к ТНА формируются исходя из задач, выполняемых двигательной установкой (ДУ), в которую ТНА входит составной частью и с которой комплектуется как единый блок. Требования к ДУ в полной мере относятся и к ТНА: обеспечивать на всех режимах работы двигателя подачу компонентов топлива с требуемым расходом и давлением при высокой степени надежности и КПД; обеспечивать минимальные размеры и массу; простота конструкции и минимальной стоимости.

Основным объектом исследования, где реализуется потенциальное и вихревое вращательное течение, являются конструктивные элементы проточных частей газовых турбин ЖРД: подводящее и отводящее устройство, полости между статором и рабочим колесом [20].

Постановка задачи исследования. При обобщенной постановке задачи о течении жидкости при теплообмене с поверхностью агрегатов, таких как компрессоры, детандеры, насосы криогенных компонентов и т.п., необходимо учитывать изменение температуры потока по длине рабочего канала, поскольку вязкость, как функция температуры, в основном определяет режим течения и, как следствие, гидравлические потери [21].

Для случая течения несжимаемой жидкости необходимо и достаточно совместного решения уравнений движения и энергии в граничных условиях пространственного пограничного слоя [22], для сжимаемой жидкости необходимо дополнение системы уравнением состояния.

Процессы теплоотдачи в энергетических установках во многом схожи, но при анализе а выводе уравнений теплообмена для граничных условий ЖРД существуют определенные отличия. Основные отличия заключаются в следующем: экстремально высокие значения тепловых потоков, температур и давлений, наличие высоких скоростей потоков, начальное турбулентное состояние потоков в активной зоне, рабочие тела могут находиться в газообразном и жидком состоянии, эффекты кривизны поверхности, наличие градиентов плотности и сжимаемости, нестационарность тепловых потоков и наличие неустойчивости потоков в активной зоне теплообмена [23].

Закон теплообмена турбулентного течения температурного пространственного пограничного слоя. Интегральное соотношение уравнения энергии.

При числах Прандтля, меньших единицы ($Pr < 1$ характерно для газообразных рабочих тел, в том числе и продуктов сгорания), толщина динамического пограничного слоя находится ниже толщины температурного пограничного слоя, т. е. $\delta < \delta_t$ (рис. 1). При очень низких числах Прандтля (жидкие металлы) молекулярная теплопроводность является основным механизмом переноса тепла и ею нельзя пренебречь даже в турбулентном ядре потока. При низких числах Прандтля термическое сопротивление распределено по всему сечению потока [24].

Примем, что в границе динамического пограничного слоя изменение температуры происходит за счет переноса скорости, а за его границей – только за счет молекулярной теплопроводности. Данное предположение хорошо согласуется с выводами Кейса, так как при очень низких числах Прандтля толщина динамического пограничного слоя в значительной степени меньше толщины температурного пограничного слоя. Соответственно, термическое сопротивление присутствует по всей толщине температурного пограничного слоя. В границах динамического пограничного слоя термическое сопротивление обусловлено турбулентным переносом тепла, а вне границ динамического пограничного слоя термическое сопротивление – молекулярной теплопроводностью.

Рассмотрим выражение толщины потери энергии температурного пограничного слоя [25]:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \int_0^{\delta_t} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) dy. \quad (1)$$

Границы интегрирования толщины потери энергии (1) необходимо разбить на два характерных участка. Первый участок интегрирования лежит в границе толщины динамического пограничного слоя δ , второй участок интегрирования – в границе окончания толщины динамического пограничного слоя δ до окончания температурного пограничного слоя δ_t .

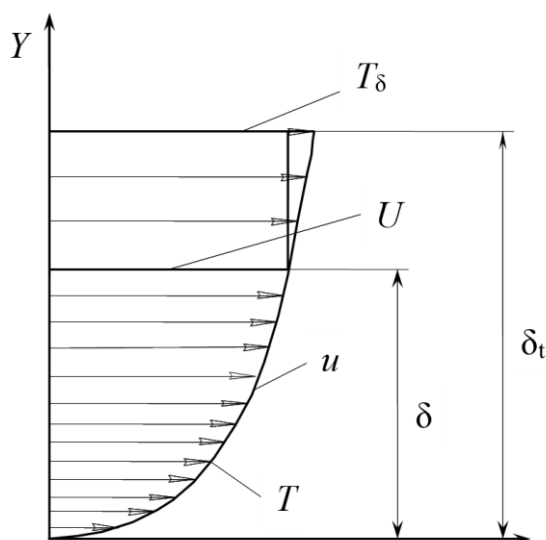


Рис. 1. Модель распределения температурного и динамического пограничных слоев при $Pr < 1$

Fig. 1. Temperature distribution model and dynamic boundary layers at $Pr < 1$

Запишем выражение толщины потери энергии (1) для рассматриваемой модели распределения температурного и динамического пограничных слоев, с принятой моделью разбиения на два характерных участка интегрирования:

$$\delta_{тф}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right) dy. \quad (2)$$

С применением уравнения (2) становится возможным определить вид закона теплообмена для случая $Pr < 1$. Для дальнейшего использования уравнение (2) необходимо проинтегрировать с учетом принятых законов распределения профиля скорости в пограничном слое. Далее последовательно рассмотрим сначала степенной профиль, потом градиентный.

Распределение динамического пограничного слоя аппроксимируем степенной функцией вида

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Распределение температурного пограничного слоя аппроксимируем функцией вида

$$\frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} = \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Учитывая принятую модель распределения динамического и температурного пограничных слоев и функции распределения параметров динамического и температурного слоев, запишем выражение для толщины потери энергии:

$$\delta_{тф}^{**} = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{\frac{1}{m}} \right) dy. \quad (3)$$

Учтем, что в первом члене уравнения (3) профили распределения динамического и температурного пограничных слоев совпадают. Тогда в границах интегрирования первого члена уравнения (3) совпадают и толщины температурного и динамического пограничных слоев, т. е. $\delta_t = \delta$. Рассматривая второй член уравнения (3) отметим, что изменения динамического пограничного слоя вдоль оси Y в границах интегрирования не происходит и скорость потока равна скорости потока в ядре течения. Тогда распределение динамического пограничного слоя во втором члене уравнения (3) запишется в виде

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Так же во втором члене уравнения (3.3) изменение эпюры температурного пограничного слоя происходит только за счет молекулярной теплопроводности. Необходимо учесть, что для данного участка эпюра профиля выглядит следующим образом:

$$\frac{T - T_{\delta}}{T_{\delta_t} - T_{\delta}} = \lambda \frac{y}{\delta_t}.$$

Учитывая условие сопряжения температурного и динамического профилей для физической модели теплопроводности при $Pr < 1$ (рис. 2) с конвективной составляющей, запишем:

$$\frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} = \lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right) + 1.$$

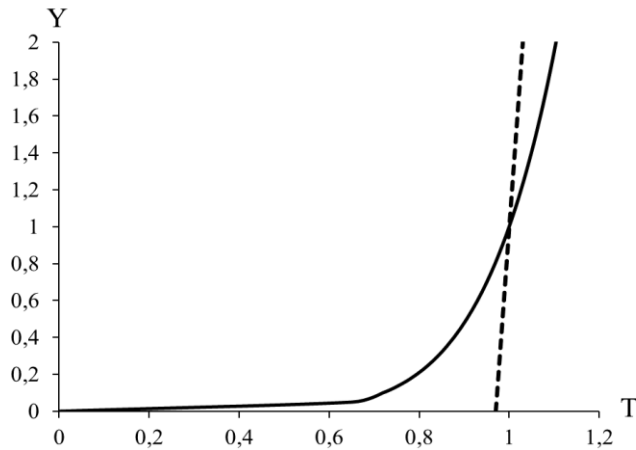


Рис. 2. Сопряжение температурного и динамического профилей для физической модели при $Pr < 1$
(— динамический пограничный слой со степенным распределением скорости; - - - температурный пограничный слой)

Fig. 2. The pairing of temperature and dynamic profiles for the physical model at $Pr < 1$
(— dynamic boundary layer with a power-law velocity distribution; - - - temperature boundary layer)

Перепишем выражение для толщины потери энергии с учетом принятой двухслойной модели распределения температурного пограничного слоя с наличием теплоотдачи при условии $Pr < 1$:

$$\begin{aligned}\delta_{t\varphi}^{**} &= \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \left(1 - \left(\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right) + 1\right)\right) dy = \\ &= \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \left(-\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right) dy.\end{aligned}\quad (4)$$

Проведем замену переменных в уравнении толщины потери энергии температурного пограничного слоя (4):

$$\begin{aligned}A1 &= \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy, \\ A2 &= \int_{\delta}^{\delta_t} \left(-\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right) dy.\end{aligned}$$

Рассмотрим первый член уравнения:

$$A1 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)}.\quad (5)$$

Определим второй член уравнения для определения толщины потери энергии температурного пограничного слоя:

$$A2 = \int_{\delta}^{\delta_t} -\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right) dy = - \frac{\delta \lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right)^2}{2} \Bigg|_{\delta}^{\delta_t} = - \frac{\lambda (\delta - \delta_t)^2}{2\delta}. \quad (6)$$

Тогда выражение для толщины потери энергии (4) с учетом (5) и (6) запишется как

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda (\delta - \delta_t)^2}{2\delta}. \quad (7)$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{\delta}{\delta_t} = x,$$

после преобразований получим

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda \left(\delta - \frac{\delta}{x} \right)^2}{2\delta}, \quad (8)$$

или

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\delta \lambda (x-1)^2}{2x^2} = \delta \left(\frac{m}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda (x-1)^2}{2x^2} \right). \quad (9)$$

Для закона теплообмена в виде критерия Стантона, необходимо определить производную температурного пограничного слоя на стенке поверхности теплообмена. Так как производная не существует формально при $m < 1$, определяем ее из принятой двухслойной модели турбулентности с ламинарным подслоем. Учитывая, что в ламинарном подслое профили динамического и температурного ППС совпадают, исходя из принятой модели

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_{\text{л}}^2 \nu} \left(\frac{\alpha_{\text{л}}^2 \nu}{U \delta_t} \right)^{\frac{2}{m+1}}, \quad (10)$$

выразим толщину динамического пограничного слоя из (9):

$$\delta = \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{\frac{m}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda (x-1)^2}{2x^2}}. \quad (11)$$

Тогда толщина температурного пограничного слоя определится как

$$\delta_t = \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda (x-1)^2}{2x}}. \quad (12)$$

Используя выражение для толщины потери энергии (12) и проведя преобразования для производной на стенке поверхности теплообмена профиля распределения температурного пограничного слоя (10), а также учитывая закон теплообмена, получим

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U} \cdot \frac{U}{\alpha_{\text{л}}^2 \nu} \left(\frac{\frac{\alpha_{\text{л}}^2 \nu}{\delta_{\text{тф}}^{**}}}{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \quad (13)$$

или

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \cdot \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{(\delta_{\text{тф}}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} \quad (14)$$

Учитывая степень турбулизации профилей распределения теплового и динамического пограничных слоев при $m=7$, запишем

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{0,25} \alpha_{\text{л}}^{1,5} \nu^{0,75}} \cdot \frac{1}{(\delta_{\text{тф}}^{**})^{0,25}} \cdot \left(\frac{7}{72} x - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{0,25} \quad (15)$$

Для практической реализации закона теплообмена необходимо определить значение $\alpha_{\text{л}}$. Оно находится из условия смыкания ламинарного подслоя с турбулентным профилем [25] при $y = \delta_{\text{л}}$ и степени профиля 7:

$$\alpha_{\text{л}} = \sqrt[1,5]{\frac{\left(\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} \right)^{0,25} \left(\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) x \frac{(m+1)}{(m+3)} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right)}{\left(\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) \frac{(m+1)}{(m+3)} \right)^{\frac{2}{m+1}} 0,01256}}.$$

Теперь окончательно получим выражение для определения коэффициента ламинарного подслоя турбулентного профиля распределения температурного пограничного слоя для принятой модели:

$$\alpha_{\text{л}} = 12,5496 \text{Pr}^{\frac{1}{18}}.$$

Запишем интегральное соотношение уравнения энергии ППС с учетом закона теплообмена (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_{\varphi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_{\text{тф}}^{**}) + \frac{1}{H_{\psi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\delta_{\text{тψ}}^{**}) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \delta_{\text{тф}}^{**} + \\ & + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \delta_{\text{тψ}}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{(\delta_t^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \quad (16)$$

Принимая относительную характерную толщину

$$J = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta_{t\psi}^{**}}{\delta_{t\varphi}^{**}}, \quad (17)$$

запишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{J}{H_\psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\varepsilon \delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \cdot \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \delta_{t\varphi}^{**} + \\ & + \frac{J}{H_\varphi H_\psi} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \times \\ & \times \frac{1}{(\delta_t^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим прямолинейное равномерное течение при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = 0, \quad H_\psi = H_\varphi = 1, \quad \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = 0 \quad [26].$$

Тогда интегральное соотношение уравнения энергии для прямолинейного равномерного течения (18) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \quad (19)$$

Для вращательного течения, реализующегося в полостях энергетических и энергосиловых агрегатов, линия тока представляет собой кольцевую линию. Выполним запись интегрального соотношения уравнения энергии (18) в цилиндрических координатах, учитывая, что для осесимметричного течения при $\varepsilon = \text{const}$ выполняются соотношения

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = R, \quad H_\varphi = R, \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial R}{\partial R} = 1, \quad H_\psi = 1, \quad \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad [27; 28]:$$

$$J\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J\varepsilon}{R} \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \quad (20)$$

Интегральное соотношение уравнения энергии (20) необходимо для записи и определения толщины потери энергии температурного пространственного пограничного слоя, входящей в выражение для определения локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона.

Локальная теплоотдача при различных законах течения внешнего потока.

Для прямолинейного равномерного течения пренебрегаем диссипативным членом и получим интегральное соотношение уравнения энергии (19) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (21)$$

Разделим переменные и проинтегрируем от нуля до текущего значения переменных:

$$\int_0^{\delta_{t\varphi}^{**}} (\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}} d\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \mu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \int_0^{\varphi} d\varphi, \quad (22)$$

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \left(\frac{\lambda \varphi}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \cdot \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2m+2}{(m+1)(m+3)}} \cdot \left(\frac{3+m}{m+1} \right)^{\frac{m+1}{3+m}}. \quad (23)$$

С учетом выражения закона теплоотдачи (14) и полученного выражения для толщины потери энергии (23), запишем:

$$\text{St} = \frac{\frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\left[\left(\frac{\lambda \varphi}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \cdot \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2m+2}{(m+1)(m+3)}} \cdot \left(\frac{3+m}{m+1} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \right]^{\frac{2}{m+1}}} \cdot (24)$$

Проведя преобразования и учитывая выражения для критериев Прандтля $\left(\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$ и

Рейнольдса $\left(\text{Re} = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$, получим выражение для определения локального коэффициента

теплоотдачи в виде критерия Стантона прямолинейного равномерного течения при степенном профиле распределения эпюры скорости и температуры при $\text{Pr} < 1$:

$$\text{St} = \frac{1}{\text{Pr}^{\frac{m+1}{m+3}}} \left(\frac{\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) (m+1)}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} (m+3) \text{Re}_U} \right)^{\frac{2}{m+3}}. \quad (25)$$

Рассмотрим вращательное течение. Пренебрегая диссипативным членом в интегральном соотношении уравнения энергии (20), получим

$$J\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} (\delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{J\varepsilon}{R} \delta_{t\varphi}^{**} - \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \times \\ \times \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (26)$$

Учтем, что реализуется вращательное течение по закону твердого тела $\left(\frac{U}{R} = \omega = \text{const} \right)$, тогда уравнение (26) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial R} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J\varepsilon \rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{R^{\frac{2}{m+1}} (\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (27)$$

Введем промежуточные обозначения:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = y,$$

$$B = \frac{\lambda}{J\varepsilon \rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dR} + \frac{y}{R} - \frac{B}{R^{\frac{2}{m+1}} y^{\frac{2}{m+1}}} = 0.$$

Данное уравнение решается методом подстановки $y = u\vartheta$:

$$\frac{du}{dR} \vartheta + \frac{d\vartheta}{dR} u + u \frac{\vartheta}{R} = \frac{B}{u^{\frac{2}{m+1}} \vartheta^{\frac{2}{m+1}} R^{\frac{2}{m+1}}}, \\ u \left(\frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\vartheta}{R} \right) + \vartheta \frac{du}{dR} = \frac{B}{u^{\frac{2}{m+1}} \vartheta^{\frac{2}{m+1}} R^{\frac{2}{m+1}}}.$$

Функция ϑ должна удовлетворять условию $\frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\vartheta}{R} = 0$, тогда $\vartheta = \frac{1}{R}$, откуда находим

$$u = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}},$$

$$y = \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{1}{R} \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}} R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)}, \quad (28)$$

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot (m+3)}}{2(m+1)} \cdot R^{\frac{m-1}{m+1}}.$$

С учетом выражения для закона теплообмена (14) и полученного выражения толщины потери энергии (28) определим критерий Стантона для вращательного течения по закону твердого тела степенного профиля распределения температурного пограничного слоя и $Pr < 1$:

$$St = \frac{\frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\left[\frac{\frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{(m+3)}{2(m+1)} R^{\frac{m-1}{m+1}}}}{\right]^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (29)$$

Проведя преобразования и учитывая критерии Прандтля $\left(Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$ и Рейнольдса $\left(Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$, определим локальный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для случая $Pr < 1$:

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left(\frac{2J\varepsilon}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} Re} \frac{(m+1)}{(m+3)} \right)^{\frac{2}{m+3}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2(m+3)-4}{(m+1)(m+3)}}. \quad (30)$$

Рассмотрим вращательное течение, которое осуществляется по закону свободного вихря ($UR = C = \text{const}$), тогда интегральное соотношение уравнения энергии (26) примет вид

$$\frac{d\delta_{t\varphi}^{**}}{dR} + \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (31)$$

Проведя замену:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = y,$$

$$D = \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}},$$

решение уравнения (31) ведем аналогично случаю вращательного течения по закону твердого тела для $\text{Pr} < 1$ подстановкой $y = u\vartheta$, причем

$$\vartheta = \frac{1}{R}, \quad u = \frac{D^{\frac{m+1}{m+3}} R^2}{2^{\frac{m+1}{m+3}}}. \quad (32)$$

Тогда толщина потери энергии определится в виде

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{m+1}{m+3}} R, \quad (33)$$

или, после подстановки:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \left[\frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} / 2 \right]^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R. \quad (34)$$

Подставив полученное выражение для определения толщины потери энергии (34) в выражение закона теплообмена (14), получим

$$St = \frac{\frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\left[\left[\frac{\lambda}{J \varepsilon C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left(\frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} / 2^{\frac{m+1}{m+3}} \right]^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R \right]^{\frac{2}{m+1}}} \quad (35)$$

Проведя преобразования и учитывая критерии Прандтля $\left(Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$ и Рейнольдса $\left(Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$, определим локальный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Стантона для вращательного течения по закону свободного вихря для случая $Pr < 1$:

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left(\frac{2J\varepsilon}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} Re} \left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) \right)^{\frac{2}{m+3}} \quad (36)$$

Таким образом, определены выражения для локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона при различных законах течения внешнего потока для степенного профиля распределения скорости в пограничном слое для случая $Pr < 1$.

На рис. 3 показано влияние критерия Прандтля на трение и теплообмен по данным различных исследований [29]. В области значений чисел Прандтля $Pr > 1$ полученные теоретические зависимости для безразмерных коэффициентов теплоотдачи в виде критериев Стантона, с учетом интегрального соотношения уравнения энергии, хорошо совпадают с зависимостями других авторов. C_f представляет коэффициент трения.

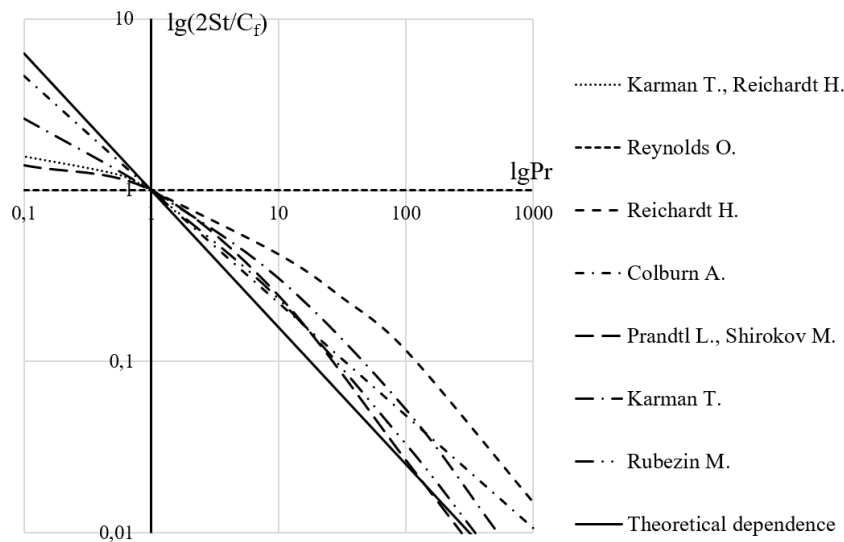


Рис. 3. Сравнение различных теорий аналогии между трением и теплообменом в турбулентных потоках при $Re=10^7$

Fig. 3. Comparison of various theories of the analogy between friction and heat transfer in turbulent flows at $Re=10^7$

Коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта, представляет произведение критериев Стантона, Рейнольдса и Прандтля $Nu = St Re Pr$.

На рис. 4 представлен график распределения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного вращательного течения по закону «твердого тела» при критерии Прандтля $Pr = 0,7$. Теоретическая зависимость определенная по модели с конвективной составляющей дает наилучшее совпадение с результатами экспериментальных исследований и не превышает 3,5 %. Так же наилучшее схождение результатов определяемых по модели с конвективной составляющей дают теоретическая зависимость полученная по аффинноподобной модели и теоретическая зависимость полученная J. M. Owen [30] и не превышают 1,5 и 2,66 % соответственно.

Расхождение теоретических данных полученных по теоретической зависимости с использованием модели с конвективной составляющей с зависимостью полученной И.В. Шевчуком [31] составили 9,5 %. С зависимостью полученной L.A. Dorfman [32] 16,7 %.

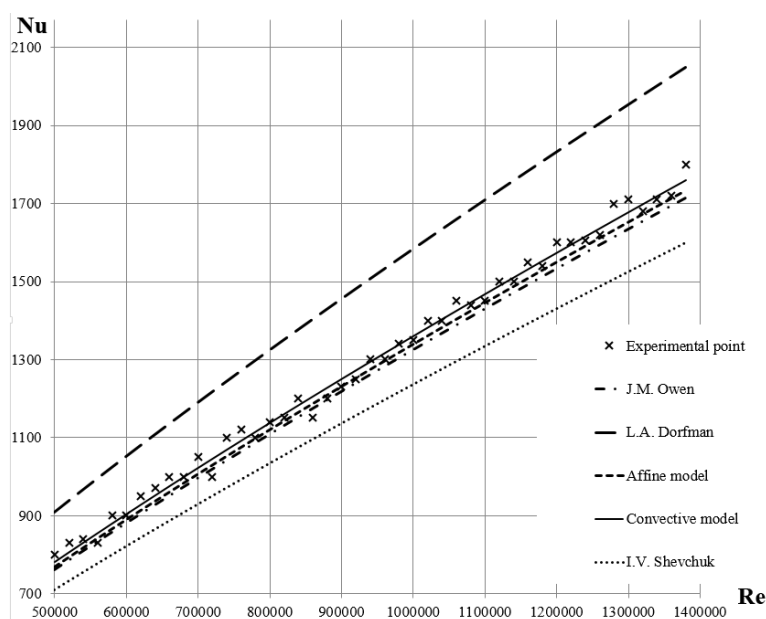


Рис. 4. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи турбулентного вращательного течения по закону твердого тела при $Pr=0,7$

4. The dependence of the dimensionless heat transfer coefficient of turbulent rotational flow according to the law of a solid body at $Pr=0.7$

На рис. 5 представлен график распределения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного потенциального вращательного течения по закону «свободного вихря» при критерии Прандтля $Pr = 0,7$. Теоретическая зависимость определенная по модели с конвективной составляющей дает хорошее совпадение с результатами экспериментальных исследований и не превышает 5 %.

Расхождение теоретических данных полученных по теоретической зависимости с использованием модели с конвективной составляющей и по модели с аффинноподобными

профилями не превышает 3,5 %. Теоретические зависимости полученные по моделям распределения температурного и динамического пограничных слоев с конвективной составляющей и с аффинноподобными профилями при $Pr = 0,7$ дают достаточно близкие результаты, в связи с близким подобием распределения температурного и динамического слоев и близки к случаю $Pr = 1$.

Из графика рис. 5 видно, что полученные теоретические зависимости находятся в области определяемой другими авторами, но сравнение результатов не корректно, так как теоретические зависимости получены для других граничных условий потенциального вращательного течения по закону «свободного вихря».

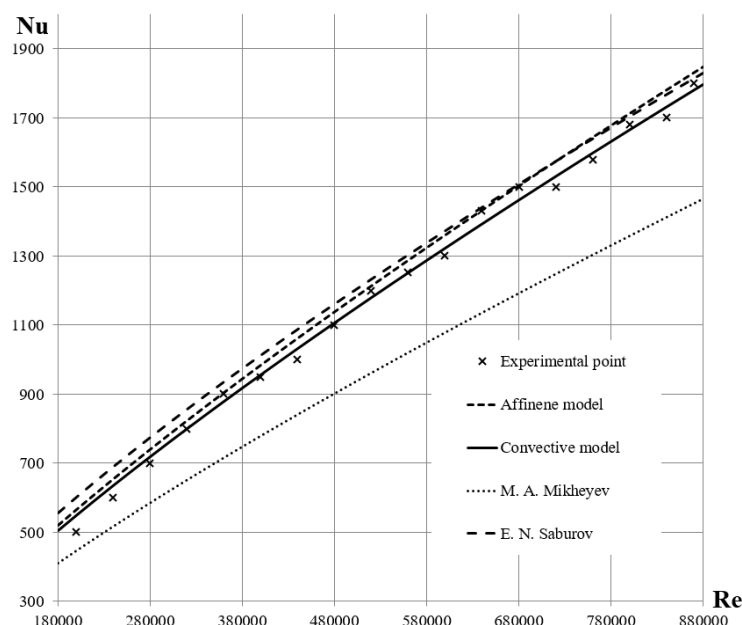


Рис. 5. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи турбулентного вращательного течения по закону свободного вихря при $Pr=0,7$

Fig. 5. The dependence of the dimensionless heat transfer coefficient of a turbulent rotational flow according to the free vortex law at $Pr=0.7$

Полученные теоретические зависимости и зависимости других авторов находятся в едином диапазоне и пригодны для инженерных расчетов и анализа данных. Необходимо отметить, что на безразмерный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта существенно влияют граничные условия течения и теплообмена, такие как скорость, вязкость, плотность и градиент температур рабочего тела и поверхности теплообмена.

Закключение. Получено интегральное соотношение уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя, позволяющего вести интегрирование по поверхности любой формы, необходимое для определения толщины потери энергии. Выражения для определения толщин потери энергии температурного пространственного пограничного слоя необходимы для определения локальных коэффициентов теплоотдачи для характерных случаев течения с учетом теплообмена.

Аналитическим путем получены выражения для определения локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона для прямолинейного равномерного течения потока, вращательного течения по закону твердого тела и вращательного течения свободного вихря степенного профиля распределения параметров динамического и температурного пограничного слоя для случая $Pr < 1$.

Аналитические выражения для коэффициентов теплоотдачи хорошо согласуются с экспериментальными данными и зависимостями других авторов.

References

1. Voiskunski J. I., Faddeev, Y. I., Fedyaevsky K. K. *Gidromekhanika* [Hydromechanics]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1982, 456 p.
2. Stoll J., Straub J. Film cooling and heat transfer in nozzles. *J. Turbomach.* 1988, No. 110, P. 57–64.
3. Dellimore K. Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling (Ph. D. thesis). University of Maryland at College Park, 2010.
4. Jansson L. S., Davidson L., Olsson E. Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model. *Numer. Heat. Transf.* 1994, Part A 25, P. 237–258.
5. Cruz C. Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling (Ph.D. thesis). University of Maryland at College Park, 2008.
6. Cruz C., Marshall A. Surface and gas measurements along a film cooled wall. *J. Thermophys. Heat. Transf.* 2007, No. 21, P. 181–189.
7. Betti B., Martelli E. Heat flux evaluation in oxygen/methane thrust chambers by RANS approach. *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, AIAA.* 2010, P. 2010–6721.
8. Ilinkov A. V., Gabdrakhmanov R. R., Takmovtsev V. V., Shchukin A. V. [Effect of centrifugal mass forces on heat transfer during air flow around a concave surface with transverse protrusions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute.* 2018, Vol. 25, No. 1, P. 39–48 (In Russ.).
9. Gorelov Yu. G., Stokach E. A. [Analysis of regularities of calculation of the heat transfer coefficient from gas at the inlet edges of the nozzle blades of high-pressure turbines]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute.* 2016, Vol. 23, No 1, P. 80–85 (In Russ.).
10. Shcherbakov M. A., Vorobyev D. A., Maslakov S. A., Ravikovich Yu. A. [Determination of the heat transfer coefficient on the turbine blade at off-design operating conditions]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute.* 2013, Vol. 20, No 3, P. 95–103 (In Russ.).
11. Dreytser G. A., Isayev S. A., Lobanov I. E. [Calculation of convective heat transfer in a pipe with periodic projections]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute.* 2004, Vol. 11, No. 2, P. 28–35 (In Russ.).
12. Knuth E. L. The mechanism of film cooling, (Ph.D. thesis). California Institute of Technology. 1954.
13. Rannie W. D. Heat transfer in turbulent shear flow. *J. Aeronaut. Sci.* 1956, No. 23, P. 485–489.
14. Turcotte D. L. A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer. *J. Aeronaut. Sci.* 1960, No. 27, P. 675–678.
15. Stechman R. C., Oberstone J., Howell J. C. Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines. *J. Spacecr. Rocket.* 1969, No. 6, P. 97–102.
16. Bartz D. R. A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients, *Jet. Propuls. ARS J.* 1957, No. 27, P. 49–51.
17. Shine S. R., Kumar S. S., Suresh B. N. A new generalised model for liquid film cooling in rocket combustion chambers. *Int. J. Heat. Mass Transf.* 2012, No. 55, P. 5065–5075.
18. Elhefny A., Liang G. Stress and deformation of rocket gas turbine disc under different loads using finite element modelling. *Propulsion and Power Research.* 2013, Vol. 2, Iss. 1, P. 38–49.
19. Grigoryev V. A., Zagrebelnyy A. O., Kuznetsov S. P. [On the estimation of the mass of the power plant in the problem of optimization of the working process parameters of the aircraft turboprop engine]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute.* 2015. Vol. 22, No 3. P. 103–106 (In Russ.).

20. Kishkin A. A., Chernenko D. V., Chernenko E. V. [The equation of impulses of a three-dimensional boundary layer]. *Izv. vuzov. Tekhnicheskiye nauki*. 2007, No. 4, P. 35–41 (In Russ.).
21. Romanenko P. N. *Teplomassoobmen i treniye pri gradiyentnom techenii zhidkostey* [Heat and mass transfer and friction at gradient flow of liquids]. Moscow, Energy Publ., 1971, 568 p.
22. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 712 p.
23. Shine S. R., Shri S. Nidhi. Review on film cooling of liquid rocket engines. *Propulsion and Power Research*. 2018, No. 7, Iss. 1, P. 1–18.
24. Keys V. M. *Konvektivnyy teplo- i massoobmen* [Convective heat and mass transfer]. Moscow, Energy Publ., 1972, 448 p.
25. Kishkin A. A., Zuev A. A., Leonov V. P. [Local heat transfer in the boundary conditions of turbomachines]. *Izv. vuzov. Mashinostroyeniye*. 2015, No (658), P. 3–10 (In Russ.).
26. Tolstoplyatov M. I., Zuev A. A., Kishkin A. A., Zhuikov D. A., Nazarov V. P. [Straight-line uniform flow of gases with heat transfer in power plants of aircraft]. *Vestnik SibGAU*. 2012, No. 4(44), P. 134–139 (In Russ.).
27. Kishkin A. A., Zhuykov D. A., Tolstoplyatov M. I. [Flow with heat transfer in the cavities of rotation of power plants of space and aircraft]. *Vestnik SibGAU*. 2011, No. 7(40), P. 63–68 (In Russ.).
28. Kishkin A. A., Zuev A. A., Chernenko E. V., Smirnov P. N. [The rotation of the liquid over a fixed base according to the law of a solid]. *Izv. vuzov. Tekhnicheskiye nauki*. 2011, No. 1, P. 126–131 (In Russ.).
29. Chapman D. R. Kester R. H. Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. *JAS*. 1953, Vol. 20, P. 441–448.
30. Owen J. M., Rogers R. H. Flow and heat transfer in rotating disc systems. Rotor-stator systems. Taunton: Research Studies Press, 1989, 302 p.
31. Shevchuk I. V. Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems. Springer, 2009, 235 p.
32. Dorfman L. A. *Gidrodinamicheskoye soprotivleniye i teplootdacha vrashchayushchikhsya tel* [Hydrodynamic resistance and heat transfer of rotating bodies]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 260 p.

Библиографические ссылки

1. Войткунский Я. И., Фаддеев Ю. И., Федяевский К. К. Гидромеханика. Л. : Судостроение, 1982. 456 с.
2. Stoll J., Straub J. Film cooling and heat transfer in nozzles // *J. Turbomach.* 1988. No. 110. P. 57–64.
3. Dellimore K. Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling (Ph. D. thesis). University of Maryland at College Park, 2010.
4. Jansson L. S., Davidson L., Olsson E. Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model // *Numer. Heat. Transf.* 1994. Part A 25. P. 237–258.
5. Cruz C. Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling (Ph.D. thesis). University of Maryland at College Park, 2008.
6. Cruz C., Marshall A. Surface and gas measurements along a film cooled wall // *J. Thermophys. Heat. Transf.* 2007. No. 21. P. 181–189.
7. Betti B., Martelli E. Heat flux evaluation in oxygen/methane thrust chambers by RANS approach // *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, AIAA*. 2010. P. 2010–6721.

8. Влияние центробежных массовых сил на теплоотдачу при обтекании потоком воздуха вогнутой поверхности с поперечными выступами / А. В. Ильинков, Р. Р. Габдрахманов, В. В. Такмовцев, А. В. Щукин // Вестник Московского авиационного ин-та. 2018. Т. 25, № 1. С. 39–48.
9. Горелов Ю. Г., Строкач Е. А. Анализ закономерностей расчета коэффициента теплоотдачи от газа на входных кромках сопловых лопаток турбин высокого давления // Вестник Московского авиационного ин-та. 2016. Т. 23, № 1. С. 80–85.
10. Щербаков М. А., Воробьев Д. А., Маслаков С. А., Равикович Ю. А. Определение коэффициента теплоотдачи на пере лопатки турбины на нерасчётных режимах работы // Вестник Московского авиационного ин-та. 2013. Т. 20, № 3. С. 95–103.
11. Дрейцер Г. А., Исаев С. А., Лобанов И. Е. Расчет конвективного теплообмена в трубе с периодическими выступами // Вестник Московского авиационного ин-та. 2004. Т. 11, № 2. С. 28–35.
12. Knuth E. L. The mechanism of film cooling, (Ph.D. thesis). California Institute of Technology. 1954.
13. Rannie W. D. Heat transfer in turbulent shear flow // J. Aeronaut. Sci. 1956. No. 23. P. 485–489.
14. Turcotte D. L. A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer // J. Aeronaut. Sci. 1960. No. 27. P. 675–678.
15. Stechman R. C., Oberstone J., Howell J. C. Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines // J. Spacecr. Rocket. 1969. No. 6. P. 97–102.
16. Bartz D. R. A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients, Jet. Propuls // ARS J. 1957. No. 27. P. 49–51.
17. Shine S. R., Kumar S. S., Suresh B. N. A new generalised model for liquid film cooling in rocket combustion chambers // Int. J. Heat. Mass Transf. 2012. No. 55. P. 5065–5075.
18. Elhefny A., Liang G. Stress and deformation of rocket gas turbine disc under different loads using finite element modelling // Propulsion and Power Research. 2013. Vol. 2, Iss. 1. P. 38–49.
19. Григорьев В. А., Загребельный А. О., Кузнецов С. П. К вопросу оценки массы силовой установки в задаче оптимизации параметров рабочего процесса авиационного турбовинтового двигателя // Вестник Московского авиационного ин-та. 2015. Т. 22, № 3. С. 103–106.
20. Кишкин А. А., Черненко Д. В., Черненко Е. В. Уравнение импульсов трехмерного пограничного слоя // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки. 2007. № 4. С. 35–41.
21. Романенко П. Н. Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. М. : Энергия, 1971. 568 с.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя М. : Наука, 1974. 712 с.
23. Shine S. R., Shri S. Nidhi. Review on film cooling of liquid rocket engines // Propulsion and Power Research. 2018. Vol. 7, Iss. 1. P. 1–18.
24. Кейс В. М. Конвективный тепло- и массообмен : пер. с англ. М. : Энергия, 1972. 448 с.
25. Кишкин А. А., Зуев А. А., Леонов В. П. Локальная теплоотдача в граничных условиях турбомашин // Изв. вузов. Машиностроение. 2015. № 1 (658). С. 3–10.
26. Прямолинейное равномерное течение газов с теплоотдачей в энергетических установках летательных аппаратов / М. И. Толстомятов, А. А. Зуев, А. А. Кишкин и др. // Вестник СибГАУ. 2012. № 4(44). С. 134–139.
27. Течение с теплоотдачей в полостях вращения энергетических установок космических и летательных аппаратов / А. А. Зуев, А. А. Кишкин, Д. А. Жуйков, М. И. Толстомятов // Вестник СибГАУ. 2011. № 7(40). С. 63–68.

28. Вращение жидкости над неподвижным основанием по закону твердого тела / А. А. Кишкин, А. А. Зуев, Е. В. Черненко, П. Н. Смирнов // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки. 2011. № 1. С. 126–131.
29. Chapman D. R. Kester R. H., Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities // JAS. 1953. Vol. 20. P. 441–448.
30. Owen J. M., Rogers R. H. Flow and heat transfer in rotating disc systems. Rotor-stator systems. Taunton: Research Studies Press, 1989. 302 p.
31. Shevchuk I. V. Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems. Springer, 2009. 235 p.
32. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М. : Физматгиз, 1960. 260с.

© Зуев А. А., Арнгольд А. А., Ходенкова Э. В., 2020

Zuev Alexander Alexandrovich – Ph. D., associate Professor, Department of Aircraft Engines; Reshetnev Siberian State University of Science and Technologies. E-mail: dla2011@inbox.ru.

Arngold Anna Anatolievna – Department of Special Connectors and Instruments, Krasnoyarsk Machine-Building Plant. E-mail: arngoldanna@mail.ru.

Khodenkova Elga Vladimirovna – senior teacher, Technical English Department; Reshetnev Siberian State University of Science and Technologies. E-mail: zamyatinaev@sibsau.ru.

Зуев Александр Александрович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры двигателей летательных аппаратов; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dla2011@inbox.ru.

Арнгольд Анна Анатольевна – начальник бюро спецсоединителей, приборов и пультов аппаратуры; АО «Красноярский машиностроительный завод». E-mail: arngoldanna@mail.ru.

Ходенкова Эльга Владимировна – старший преподаватель кафедры технического иностранного языка; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: dla2011@inbox.ru.