Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 512.54
Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-333-336

For citation: Senashov V. I. 6-aperiodic words over the three-letter alphabet. *Siberian Journal of Science and Technology.* 2020, Vol. 21, No. 3, P. 333–336. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-333-336

Для цитирования: Сенашов С. И. 6-апериодические слова над трехбуквенным алфавитом // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 3. С. 333–336. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-333-336

6-APERIODIC WORDS OVER THE THREE-LETTER ALPHABET

V. I. Senashov

Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

The work is devoted to the study of sets of aperiodic words over a finite alphabet. A set of such words can be considered as some kind of finite formal language. W. Burnside raised the issue of local finiteness of periodic groups. The negative answer was given only sixty years later by E. S. Golod. Soon S. V. Aleshin, R. I. Hryhorczuk, V. I. Sushchanskii constructed more examples confirming the negative answer to Burnside's question. Finiteness of the free Burnside group of period n was established for periods two and three (W. Burnside), for period four (W. Burnside, I. N. Sanov), for period six (M. Hall). The infinity of such a group, for odd indicators exceeding 4381, is established in the work of P. S. Novikov and S. I. Adyan (1967), and for odd indicators exceeding 664 in the book by S. I. Adian (1975). A more intuitive version of the proof for odd n > 1010 was proposed by A. Yu. Olshansky (1989). In this article, we consider the set of 6-aperiodic words. In the monograph by S. I. Adyan (1975) it was shown the proof of S. E. Arshon (1937) theory that there are infinitely many three-aperiodic words of any length in the two-letter alphabet. In the book of A. Y. Olshansky (1989), a proof of the infinity of the set of six-aperiodic words is given and an estimate of the number of such words of any given length is obtained. Here we try to estimate the function of the number of six-aperiodic words of any given length in a three-letter alphabet. The results obtained can be useful for encoding information in space communication sessions.

Keywords: locally finite group, word, aperiodicity, estimate, formal language.

6-АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СЛОВА НАД ТРЕХБУКВЕННЫМ АЛФАВИТОМ

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: sen1112home@mail.ru

Работа посвящена изучению множеств апериодических слов над конечным алфавитом. Множество таких слов можно рассматривать как некоторый конечный формальный язык. У. Бернсайд задал вопрос о локальной конечности периодических групп. Отрицательный ответ был получен лишь через шестьдесят лет Е. С. Голодом. Вскоре С. В. Алешиным, Р. И.

Григорчуком, В. И. Сущанским были построены еще примеры, подтверждающие отрицательный ответ на вопрос Бернсайда. Конечность свободной бернсайдовской группы периода n установлена в разное время для периодов два и три (У. Бернсайд), для периода четыре (У. Бернсайд; И. Н. Санов), для периода шесть (М. Холл). Бесконечность такой группы, для нечетных показателей, превышающих 4381, установлена в работе П. С. Новикова – С. И. Адяна (1967), а для нечетных показателей, превышающих 664, – в монографии С. И. Адяна (1975). Геометрический метод доказательства для нечетных показателей, превышающих 1010, принадлежит А. Ю. Ольшанскому (1989). В данной статье рассматриваем множество 6-апериодических слов. l-апериодическим словом называется слово X, не содержащее нетривиальных подслов типа Yl. В книге С. И. Адяна (1975) имеется обоснование С. Е. Аршона (1937) того, что в двухбуквенном алфавите имеется бесконечно много три-апериодических слов любой длины. В книге А. Ю. Ольшанского (1989) приведено доказательство бесконечности множества шесть-апериодических слов и получена оценка количества таких слов любой данной длины. Здесь мы хотим оценить функцию количества шестьапериодических слов любой данной длины в алфавите из трех букв. Полученные результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космосвязи.

Ключевые слова: локально конечная группа, слово, апериодичность, оценка, формальный язык.

Введение. Работа посвящена изучению множеств апериодических слов над конечным алфавитом. Множество таких слов можно рассматривать как некоторый конечный формальный язык.

Группа $B(d,n)$ с d порождающими и тождественным соотношением $x^n = 1$ называется *свободной бернсайдовской группой ранга d и периода n*.

Конечность свободной бернсайдовской группы установлена в разное время для периода два (тривиальный случай), для периода три У. Бернсайдом, для периода четыре У. Бернсайдом для двух порождающих; И.Н. Сановым для произвольного числа порождающих элементов, для периода шесть М. Холлом.

Уильям Бернсайд сто двадцать лет назад поставил вопрос о локальной конечности групп, с тождеством $x^n = 1$ [1]. Сейчас этот вопрос известен как проблема Бернсайда. Группа называется локально конечной, если любая ее конечнопорожденная подгруппа конечна.

Отрицательный ответ на проблему Бернсайда был получен в 1968 г. в работах П.С. Новикова – С.И. Адяна [2–4]. Доказательство бесконечности группы $B(d,n)$, с числом порождающих больше либо равным двух, для нечетных показателей, превышающих 4380 было дано в [2–4], а для нечетных периодов, превышающих 665 – в монографии С.И. Адяна [5].

Более подробно с результатами по проблеме Бернсайда можно познакомиться по работе С. И. Адяна [6].

Теоремы о бесповторных словах в алфавите из трёх букв и 3-апериодических слов любой длины в алфавите из двух букв доказал А. Туэ в 1906 г. [7] (см. также лемму 1 из [6]). В статье С.Е. Аршона 1937 г. [8] доказано существование n-значной ассиметричной бесповторной последовательности для алфавита не менее, чем из трех букв. В монографии С.И. Адяна [5] на с. 13–16 способом Аршона [8] доказано, что в алфавите из двух символов существуют бесконечные 3-апериодические последовательности. К этому же направлению относится работа [9]. В монографии А.Ю. Ольшанского [9] доказана бесконечность множества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов любой данной длины.

Мной был сделан доклад по теме апериодических слов на конференции «Решетневские чтения» [10], затем исследования по этому вопросу были продолжены: в [11] была улучшена оценка А.Ю. Ольшанского из [9] количества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите.

В данной статье будет изучено множество 6-апериодических слов в трехбуквенном алфавите. Полученные результаты могут быть полезны при кодировании информации в сеансах космосвязи. Мной также рассматривались ранее 5-периодические слова [12] и 12-апериодические слова [13].

Основной результат. Для удобства чтения приведем сначала несколько необходимых определений.

Определение. *Периодическим словом с периодом H* называется любое подслово некоторого слова H^p, $p>0$.

Например, *ababa* – периодическое слово с периодом *ab* или *ba*.

Определение. *l-апериодическим словом* называется слово *X*, не содержащее нетривиальных подслов типа Y^l.

С.И. Адяном [4] доказано, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-апериодических слов.

Рассматривалась также задача о существовании сколь угодно длинных слов, свободных от квадратов, над алфавитом из трех букв [8].

А.Ю. Ольшанский в работе [9] рассматривал множество 6-апериодических слов и получил оценку функции $f(n)$ – количества таких слов длины n: в двухбуквенном алфавите существует сколь угодно длинные 6–апериодические слова и число $f(n)$ таких слов длины n больше, чем $(3/2)^n$. В работе [11] автором улучшена эта оценка количества 6-апериодических слов над двухбуквенным алфавитом.

Для нас представляет интерес оценить количество 6-апериодических слов в алфавите из трех букв.

При получении оценки мы будем использовать метод, используемый А.Ю. Ольшанским в [9].

Теорема. *В трехбуквенном алфавите существует сколь угодно длинные* 6–*апериодические слова и число* $f(n)$ *таких слов длины* n *больше, чем* $(5/2)^n$.

Доказательство. Пусть {*a,b,c*} – алфавит. В этом алфавите будем рассматривать 6-апериодические слова. Сначала докажем неравенство $f(n+1)>(5/2)f(n)$ при помощи метода математической индукции.

Рассмотрим случай *n*=1: $f(2)>5/2\cdot f(1)$, где $f(1)=3$, $f(2)=9$. То есть база индукции доказана.

6–апериодическое слово длины $n+1$ можно получить добавлением справа букв *a, b* или *c* к 6–апериодическому слову длины n. Таким способом получается $3f(n)$ слов X длины $n+1$.

Часть из таких слов могут содержать степени A^6. Оценим количество таких лишних вариантов.

При приписывании справа получится лишь тождество вида $X\equiv YA^6$, поскольку в противном случае начало длины n слова X длины $n+1$ содержит A^6. Для слов *A* длины 1 (всего три таких слова) имеется меньше, чем $3f(n-5)$ слов вида $X\equiv YA^6$, где слово Y 6-апериодично и $|Y|=n-5$:

$$(\underbrace{.....}_{n-5}\ \underbrace{aa...a}_{5})\ a$$

$$(\underbrace{\ldots\ldots}_{n-5}\underbrace{bb\ldots b}_{5})\,b,$$

$$(\underbrace{\ldots\ldots}_{n-5}\underbrace{cc\ldots c}_{5})\,c.$$

Очевидно, имеется 9 слов A длины 2. Соответствующих слов вида $X \equiv YA^6$ длины $n+1$ меньше, чем $9f(n-11)$, где слово Y 6-апериодично длины $n-11$.

Продолжая рассуждения таким же образом, имеем:

$$f(n+1) > 3f(n) - 3f(n-5) - 3^2 f(n-11) - 3^3 f(n-17) - \ldots$$

Так как по индуктивному предположению $f(n) > (5/2)^k \cdot f(n-k)$, то

$$f(n+1) > 3f(n) - (3(5/2)^{-5} f(n) + 3^2(5/2)^{-11} f(n) + 3^3(5/2)^{-17} f(n) + \ldots).$$

Преобразуем полученное неравенство:

$$f(n+1) > f(n)(3 - (3(5/2)^{-5} + 3^2(5/2)^{-11} + 3^3(5/2)^{-17} + \ldots).$$

Поскольку $\sqrt[6]{3} < 5/2$, то геометрическая прогрессия в правой части неравенства является убывающей со знаменателем $3(5/2)^{-6}$.

Оценим второй сомножитель правой части S при помощи формулы геометрической прогрессии

$$S = 3 - \frac{3(5/2)^{-5}}{1 - 3(5/2)^{-6}}.$$

Нам нужно доказать, что $S > 5/2$.

Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{3 - 9(5/2)^{-6} - 3(5/2)^{-5} + 3(5/2)^{-5} - 5/2}{1 - 3(5/2)^{-6}} > 0.$$

После упрощения получаем:

$$\frac{3 - 9(5/2)^{-6} - 5/2}{1 - 3(5/2)^{-6}} > 0.$$

Так как $1 - 3(5/2)^{-6} > 0$, то остается проверить верность неравенства:

$$3 - 9(5/2)^{-6} - 5/2 > 0.$$

Убеждаемся в его справедливости непосредственным вычислением. Следовательно, доказано, что неравенство $f(n+1) > 5/2\, f(n)$ выполняется для любых натуральных n. Теорема доказана.

Заключение. Продолжается изучение вопроса об оценке количества апериодических слов. Рассмотрено множество шесть-апериодических слов в трехбуквенном алфавите и получена оценка для функции количества таких слов любой данной длины.

Благодарности. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Acknowledgment. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

References

1. Burnside W. [On an unsettled question in the theory of discontinuous groups]. *Quart. J. Pure. Appl. Math.* 1902, Vol. 33, P. 230–238.

2. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat*. 1968, No. 1 (32), P. 212–244 (In Russ.).

3. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. II]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1968, No. 2 (32), P. 251–524 (In Russ.).

4. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. III]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1968, No. 3 (32), P. 709–731 (In Russ.).

5. Adyan S. I. *Problema Bernsayda i tozhdestva v gruppakh* [The Burnside Problem and Identities in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 336 p.

6. Adyan S. I. [Burnside's problem and related questions]. *Uspekhi Mat. sciences.* 2010. Vol. 65, Issue. 5 (395), P. 5–60 (In Russ.).

7. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih. Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.

8. Arshon S. E. [Proof of existence of *n*-unit infinite asymmetric sequences]. *Mat. sb.* 1937, No. 4(2 (44)), P. 769–779 (In Russ.).

9. Olshansky A. Yu. *Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 448 p.

10. Senashov V. I. [Aperiodic words]. *Reshetnevskiye chteniya: materialy XIX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., posvyashch. 55-letiyu Sib. gos. aerokosmich. un-ta im. akad. M. F. Reshetneva* [Reshetnev Readings: materials of XIX Intern. scientific and practical. conf. for 55th anniversary of Sib. State. Aerokosmich. Univ. Acad. M. F. Reshetnev] (10-14 Nov. 2015, Krasnoyarsk). Krasnoyarsk, 2015, part 2, P. 132–133 (In Russ.).

11. Senashov V. I. [Improved estimates of the number 6-aperiodic words of fixed length]. *Vestnik SibGAU.* 2016, Vol. 17, No. 2, P. 168–172 (In Russ.).

12. Senashov V. I. [Estimation of the number of 5-aperiodic words]. *Vestnik Tuvinskogo gos. un-ta. Tekhn. i fiz.-mat. nauki.* 2017, No. 3, P. 132–138 (In Russ.).

13. Senashov V. I. [Estimation of the number of 12-aperiodic words of fixed length]. *Vestnik SibGAU*. 2017, Vol. 18, No. 1, P. 93–96 (In Russ.).

Библиографические ссылки

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure. Appl. Math. 1902. Vol. 33. P. 230–238.

2. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах // Изв. АН СССР, сер. мат. 1968. № 1 (32) . С. 212–244.

3. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. II // Изв. АН СССР, сер. мат. 1968. № 2 (32). С. 251–524.

4. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. III // Изв. АН СССР, сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 709–731.

5. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука. 1975. 336 с.

6. Адян С. И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, вып. 5 (395). С. 5–60.

7. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.

8. Аршон С. Е. Доказательство существования *n*-значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. № 4 (2 (44)). С. 769–779.

9. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука. 1989. 448 с.

10. Сенашов В. И. Апериодические слова // Решетневские чтения : материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева (10–14 нояб. 2015, г. Красноярск) : в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логиинова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2015. Ч. 2. С. 132–133.

11. Сенашов В. И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2016. Т. 17, № 2. С. 168–172.

12. Сенашов В. И. Оценка количества 5-апериодических слов // Вестник Тувинского гос. ун-та. Техн. и физ.-мат. науки. 2017. № 3. С. 132–138.

13. Сенашов В. И. Оценка количества 12-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2017. Т. 18, № 1. С. 93–96.

© Сенашов В. И., 2020

Senashov Vladimir Ivanovich – Dr. Sc., professor, leader researcher of Institute of Computational Modelling of SB RAS. E-mail: sen1112home@mail.ru.

Сенашов Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник; Институт вычислительного моделирования СО РАН. E-mail: sen1112home@mail.ru.