

Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи
и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 539.374

Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-303-306

For citation: Annin B. D., Senashov S. I., Gomonova O. V. Solving boundary value problems of equations of two-dimensional elasticity theory using conservation laws. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, Vol. 21, No. 3, P. 303–306. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-303-306

Для цитирования: Аннин Б. Д., Сенашов С. И., Гомонова О. В. Решение краевых задач уравнений двумерной теории упругости с помощью законов сохранения // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 3. С. 303–306. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-3-303-306

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Б. Д. Аннин¹, С. И. Сенашов^{2*}, О. В. Гомонова²

¹Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН

Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 15

²Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: sen@sibsau.ru

Плоская задача для уравнений упругости достаточно хорошо изучена. Это объясняется ее важностью для приложений и тем, что уравнения сводятся к системе Коши – Римана. Несмотря на это, точных решений, которые описывали бы напряженно-деформированное состояние тел конечных размеров, не так много. Законы сохранения для дифференциальных уравнений появились более ста лет назад, но, как правило, они не использовались для решения конкретных задач, а представляли «чисто академический» интерес. Ситуация изменилась с развитием техники построения законов сохранений для произвольных систем дифференциальных уравнений, а затем – с использованием законов сохранения для решения краевых задач теории пластичности и упруго-пластичности. В этой статье построены новые законы сохранения для уравнений плоской теории упругости в стационарном случае. Эти законы образуют бесконечную серию, которая тесно связана с решениями уравнений упругости. Именно этот факт позволил свести решение краевых задач в терминах перемещений к вычислению контурных интегралов по границе области, ограниченной изучаемым упругим телом.

Из данной методики следует, что область может быть многосвязной, а граница – кусочно-гладкой.

Ключевые слова: законы сохранения, краевая задача, уравнения упругости.

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF EQUATIONS OF TWO- DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY USING CONSERVATION LAWS

B. D. Annin¹, S. I. Senashov^{2*}, O. V. Gomonova²

¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS

15, Lavrentyev Prospect, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

The plane problem for elasticity equations is well studied. It can be explained by its importance for applications and by the fact that the equations can be reduced to the Cauchy-Riemann system. In spite of this importance, exact solutions that would describe the stress-strain state of bodies of finite dimensions are not numerous. Conservation laws for differential equations have been appeared more than a hundred years ago, but, as a rule, they were not used to solve specific problems, but were of purely academic interest. The situation changed with the development of the technique of construction of conservation laws for arbitrary systems of differential equations, and then with the use of conservation laws to solve boundary value problems of the theory of plasticity and elastic-plasticity. In this article, new conservation laws are constructed for the equations of the plane theory of elasticity in the stationary case. These laws form an infinite series, which is closely related to the elasticity equations solving. This fact made possible to reduce solving of boundary value problems, in terms of displacements, to the calculation of contour integrals along the boundary of a domain bounded by the studying elastic body. As it follows from the proposed technique, the studied area can be multiply connected, and the considered boundary can be piecewise-smooth.

Keywords: conservation laws, boundary value problem, elasticity equations.

Введение. Обычно уравнения двумерной статической упругости решаются с помощью методов ТФКП. Эти методы были развиты Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили. Использование методов ТФКП для решения задач упругости требует хорошего владения техникой ТФКП и, как правило, применяется для областей ограниченных гладкими контурами (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). В данной статье предложен метод решения этих же задач с помощью законов сохранения. По-видимому, впервые законы сохранения для уравнений упругости были вычислены в [3, 4]. Эти вычисления были основаны на теореме Э. Нётер. Найденные законы не нашли никакого практического применения и представляли чисто академический интерес (см., например, [5]). В работах [6–10] показано, что законы сохранения можно успешно использовать при решении краевых задач теории пластичности и упруго-пластичности. Еще Г. П. Черепанов [11, 12] заметил, что методы ТФКП, применяемые при решении плоских задач, фактически восходят к законам сохранения. В представленной работе найдена бесконечная серия новых законов сохранения. Эти законы сохранения позволили получить формулы, с помощью которых можно эффективно сводить краевые задачи к квадратурам. Последние есть криволинейные интегралы по замкнутому контуру и без труда решаются численно для заданных краевых условий в перемещениях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения двумерной упругости в стационарном случае

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} = 0, F_2 = (\lambda + 2\mu)v_{yy} + (\lambda + \mu)u_{xy} + \mu v_{xx} = 0, \quad (1)$$

где λ, μ – постоянные, называемые параметрами Ламе, u, v – компоненты вектора деформации, индексы внизу означают производные по соответствующим компонентам.

Найдем для (1) законы сохранения специального вида. Законом сохранения для системы уравнений (1), назовем выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2, \quad (2)$$

где ω_i некоторые функции от x, y , которые одновременно не тождественно равны нулю. Величины A, B назовем компонентами сохраняющегося тока. Ищем компоненты сохраняющегося тока в виде:

$$A = \alpha^1(\lambda + 2\mu)u_x + \beta^1 u_y + \gamma^1 \mu v_x + \delta^1 v_y, \quad B = \alpha^2 u_x + \beta^2 u_y + \gamma^2 v_x + \delta^2 v_y, \quad (3)$$

где γ^i, δ^i – некоторые функции только от x, y .

Подставим выражения (3) в (2). В результате получим полином первой степени по переменным $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}$. Приравнивая в этом полиноме к нулю коэффициенты при производных и учитывая, что $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \delta^i$ – функции только от x, y , получаем после исключения $\omega^i, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -\beta^1 + (\lambda + \mu)\gamma^1, \quad \beta^2 = \mu\alpha^1, \quad \gamma^2 = -\delta^1 + (\lambda + \mu)\alpha^1, \quad \delta^2 = (\lambda + 2\mu)\gamma^1, \\ (\lambda + 2\mu)\alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \quad \mu\gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \delta_x^1 + \delta_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует:

$$(\lambda + 2\mu)\alpha_x^1 - \beta_y^1 + (\lambda + \mu)\gamma_y^1 = 0, \quad \mu\gamma_x^1 - \delta_y^1 + (\lambda + \mu)\alpha_y^1 = 0, \quad (5)$$

$$\beta_x^1 + \mu\alpha_y^1 = 0, \quad (\lambda + 2\mu)\gamma_y^1 + \delta_x^1 = 0. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) получаем

$$(\lambda + 2\mu)\alpha_{xx}^1 + (\lambda + \mu)\gamma_{xy}^1 + \mu\alpha_{yy}^1 = 0, \quad (\lambda + 2\mu)\gamma_{yy}^1 + (\lambda + \mu)\alpha_{xy}^1 + \mu\gamma_{xx}^1 = 0. \quad (7)$$

Очевидно, что (7), с точностью до обозначений, совпадает с системой (1). Следовательно, α^1, γ^1 – произвольное гладкое решение системы уравнений (1).

Из (3) с учетом (4), получаем сохраняющийся ток

$$A = \alpha^1(\lambda + 2\mu)(u_x + v_y) + \gamma^1 \mu(v_x - u_y), \quad B = \gamma^1(\lambda + 2\mu)(u_x + v_y) + \alpha^1 \mu(v_x - u_y), \quad (8)$$

где α^1, γ^1 – произвольное решение системы уравнений (1).

2. Построение решений краевой задачи.

Известно, что

$$u = G^1 - \frac{1}{4(1-\nu)}(xG^1 + yG^2 + G^0)_x = G^1 - \omega(xG^1 + yG^2 + G^0)_x, \quad v = G^2 - \omega(xG^1 + yG^2 + G^0)_y \quad (9)$$

есть решение системы уравнений (1). Здесь G^i – произвольные гармонические функции, ν – коэффициент Пуассона, который можно выразить через параметры Ламе.

Из (9) получаем

$$u_x + v_y = (G_x^1 + G_y^2)(1 - \omega/2), \quad -u_y + v_x = -G_y^1 + G_x^2. \quad (10)$$

Пусть x_0, y_0 – произвольная точка области Ω с гладкой границей Γ . Положим $G^1 = \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \ln r^2$, $G^2 = 0$. Тогда получаем

$$u_x + v_y = 2 \frac{x - x_0}{r^2} \omega, \quad -u_y + v_x = 2 \frac{y - y_0}{r^2}. \quad (11)$$

Из (2) по формуле Грина имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (A_x + B_y) dx dy &= \oint_{\Gamma} -A dy + B dx = \\ &= \oint_{\Gamma} -\left(\alpha^1(\lambda + 2\mu)(u_x + v_y) + \gamma^1\mu(v_x - u_y)\right) dy + \left(\gamma^1(\lambda + 2\mu)(u_x + v_y) + \alpha^1\mu(v_x - u_y)\right) dx = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть теперь контур Γ_1 состоит из двух контуров – Γ и окружности радиуса $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Полагая в (12) вместо Γ контур Γ_1 и с учетом соотношения (11), получим

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} -\left(\alpha^1(\lambda + 2\mu)2 \frac{x - x_0}{r^2} \omega - \gamma^1\mu 2 \frac{y - y_0}{r^2}\right) dy + \left(\gamma^1(\lambda + 2\mu)2 \frac{x - x_0}{r^2} \omega + \alpha^1\mu(v_x - u_y)\right) dx = \\ = \oint_{\Gamma} + \oint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим уравнение окружности в параметрическом виде:

$$x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, \quad y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тогда последний из интегралов в формуле (13) запишется так:

$$\begin{aligned} \oint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2} &= \\ &= \int_0^{2\pi} -\left(\alpha^1(\lambda + 2\mu)2\omega \cos \varphi - \gamma^1\mu 2 \sin \varphi\right) \cos \varphi d\varphi + \left(\gamma^1(\lambda + 2\mu)2 \cos \varphi + \alpha^1\mu 2 \sin \varphi\right) \sin \varphi d\varphi = \\ &= 2\pi\alpha^1(x_0, y_0)(\mu - (\lambda + 2\mu)\omega). \end{aligned} \quad (14)$$

В формуле (14) была использована теорема о среднем. Окончательно из (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi(\mu - (\lambda + 2\mu)\omega)} \oint_{\Gamma} -\left(\alpha^1(\lambda + 2\mu)2\omega \left(\frac{x - x_0}{r^2}\right) - 2\gamma^1\mu \left(\frac{y - y_0}{r^2}\right)\right) dy + \\ + \left(\gamma^1(\lambda + 2\mu)2\omega \left(\frac{x - x_0}{r^2}\right) - 2\alpha^1\mu \left(\frac{y - y_0}{r^2}\right)\right) dx = \alpha^1(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь в уравнениях (10) положим $G^2 = \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) = \ln r^2$, $G^1 = 0$. В этом случае аналогичные рассуждения и вычисления дают формулу для $\gamma^1(x_0, y_0)$.
Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi(\mu + (\lambda + 2\mu)\omega)} \oint_{\Gamma} \left(\alpha^1 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) + 2\gamma^1 \mu \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) \right) dy + \\ & + \left(\gamma^1 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) + 2\alpha^1 \mu \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) \right) dx = \gamma^1(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (15), (16) позволяют вычислить α^1, γ^1 в любой точке (x_0, y_0) из области, если мы знаем значение этих функций на границе Γ . А так как α^1, γ^1 являются решением уравнений (1), то мы получаем метод для построения решений системы (1) по их граничным условиям. А именно, пусть поставлена следующая краевая задача: имеется область Ω с границей Γ . На Γ заданы компоненты вектора смещения

$$u|_{\Gamma} = u_0(x, y), \quad v|_{\Gamma} = v_0(x, y). \quad (17)$$

Тогда, на основании формул (15), (16) решение задачи (17) для системы уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi(\mu - (\lambda + 2\mu)\omega)} \oint_{\Gamma} \left(u_0 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) - 2v_0 \mu \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) \right) dy + \\ & + \left(v_0 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) - 2u_0 \mu \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) \right) dx = u_0(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi(\mu + (\lambda + 2\mu)\omega)} \oint_{\Gamma} \left(u_0 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) + 2v_0 \mu \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) \right) dy + \\ & + \left(v_0 (\lambda + 2\mu) 2\omega \left(\frac{y-y_0}{r^2} \right) + 2u_0 \mu \left(\frac{x-x_0}{r^2} \right) \right) dx = v_0(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Заключение. В статье найдены законы сохранения, зависящие от производных первого порядка и линейные по ним. Показано, что два коэффициента при производных являются решениями уравнений упругости в плоском случае. Это позволило свести решение краевых задач в перемещениях к вычислению контурных интегралов по границе области. Предложенная методика без труда может быть обобщена на многосвязные области [13–15], а также на трехмерный случай.

References

1. Timoshenko S. P., Goodier J. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 576 p.
2. Novatsky V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1975. 872 c.

3. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result. Arch. Rat. Mech. Anal. 1984, No. 85, P. 111–129.
4. Olver P. Conservation laws in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. Arch. Rat. Mech. Anal. 1984, No. 85, P. 131–160.
5. Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy* [Systems of quasilinear equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 688 p.
6. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Grupповые свойства уравнений упругости и пластичности* [Group properties of equations of elasticity and plasticity]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 143 p.
7. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. *Matematicheskiye voprosy dvumernykh uravneniy ideal noy plastichnosti* [Mathematical problems of twodimensional equations of ideal plasticity]. Krasnoyarsk, 2012, 137 p.
8. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozheniye simmetriy i zakonov sokhraneniya k resheniyu differentsialnykh uravneniy* [Application of symmetries and conservation laws to solving differential equations]. Novosibirsk, 2001, 192 p.
9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity. *Proc. Edinburg Math. Soc.* 1988, P. 415–439.
10. Vinogradov A. M., Krasilshchik I. S., Luchagin V. V. *Simmetrii i zakony sokhraneniya* [Symmetries and conservation laws]. Moscow, Factor Publ., 1996, 461 p.
11. Annin B. D., Cherepanov G. P. *Uprugoplasticheskaya zadacha* [Elastic-plastic problem]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 126 p.
12. Cherepanov G. P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Mechanics of fragile fracture]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 640 p.
13. Senashov S. I., Savostyanova I. L. [Elastic state of a plate with holes of arbitrary shape]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. U. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2016, No. 3 (29), P. 128–134 (In Russ.).
14. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of the plane theory of elasticity]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 1(53), P. 79–81 (In Russ.).
15. Senashov S. I., Filyushina E. V. *Uprugoplasticheskiye zadachi dlya ortotropnykh sred* [Elasticplastic problems for orthotropic media]. Krasnoyarsk, 2016, 116 p.

Библиографические ссылки

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
3. Olver P. Conservation laws in elasticity 1. General result. Arch. Rat. Mech. Anal. 1984, Vol. 85, P. 111–129.
4. Olver P. Conservation laws in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. Arch. Rat. Mech. Anal. 1984, Vol. 85, P. 131–160.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М. : Наука, 1978. 688 с.
6. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука, 1983. 143 с.
7. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 137 с.
8. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 192 с.
9. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // *Proc. Edinburg Math.Soc.* 1988. P. 415–439.

10. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. М. : Фактор, 1996. 461 с.
11. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. 126 с.
12. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М. : Наука, 1974. 640 с.
13. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 128–134.
14. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. № 1(53). С. 79–81.
15. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Упругопластические задачи для ортотропных сред / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2017. 116 с.

© Аннин Б. Д., Сенашов С. И., Гомонова О. В.

Annin Boris Dmitrievich – Dr. Sc., Professor, academician of the Russian Academy of Sciences, head of Department; Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS.

Senashov Sergey Ivanovich – Dr. Sc., Professor, head of the Department; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Gomonova Olga Valeryevna – Cand. Sc., associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology.

Аннин Борис Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, заведующий отделом; Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Гомонова Ольга Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева.