Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 539.374
Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-201-205

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L., Cherepanova O. N. Elastic-plastic problem in the case of inhomogeneous plasticity under complex shear conditions. *Siberian Journal of Science and Technology.* 2020, Vol. 21, No. 2, P. 201–205. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-201-205.

Для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Черепанова О. Н. Упругопластическая задача в случае неоднородной пластичности в условиях сложного сдвига // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 2. С. 201–205. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-201-205.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СДВИГА

С. И. Сенашов[1*], И. Л. Савостьянова[1], О. Н. Черепанова[2]

[1] Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
[2] Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
*E-mail: sen@sibsau.ru

В работе решена плоская упругопластическая задача о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием, которое ограничено кусочно гладким контуром. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода, возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы непростая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г. П. Черепанов.

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге в случае однородной и изотропной пластичности посвящена обширная литература. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения. При этом предполагается, что предел текучести является функцией от координат точки, в которой исследуется напряженное состояние. Известно, что упругие свойства конструкционных материалов могут быть однородными и изотропными, а при этом их предел текучести и прочности – неоднородным. Такая ситуация наблюдается, например, при нейтронной бомбардировке конструкционных материалов. В данной статье будет изучена именно такая ситуация. В статье приведены законы сохранения для уравнений, описывающих сложный сдвиг. При этом предполагалось, что компоненты сохраняющегося тока зависят от компонент тензора напряжений и координат. Компоненты тензора напряжений входят в них линейно. Задача о нахождении компонент сохраняющегося тока свелась к системе Коши – Римана. Решение этой системы

позволило свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия и тем самым найти границу между упругой и пластической областями.

Ключевые слова: упругопластическая задача, неоднородная пластичность, сложный сдвиг, законы сохранения.

ELASTIC-PLASTIC PROBLEM IN THE CASE OF INHOMOGENEOUS PLASTICITY UNDER COMPLEX SHEAR CONDITIONS

S. I. Senashov[1*], I. L. Savostyanova[1], O. N. Cherepanova[2]

[1] Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
[2] Siberian Federal University
79, Svobodniy Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
*E-mail: sen@sibsau.ru

In this research, the authors solved a two-dimensional elastic-plastic problem of the stress state under complex shear conditions in the body weakened by a hole that is bounded by a piecewise smooth contour. The stress state of a complex shear occurs in a cylindrical body of infinite length under the action of loads directed along the cylinder generators and constant along the generators. At the same time, with a sufficiently large load, both elastic and plastic zones appear in the body. As in any problem of this kind, it is necessary to find a previously unknown boundary separating the elastic and plastic zones. Finding such a boundary is not an easy task, but the specificity of elastic-plastic problems of complex shear is that solving such problems is easier than solving similar elastic problems. Apparently, for the first time this fact was noted by G. P. Cherepanov.

A lot of research is devoted to elastic-plastic problems of complex shear in the case of homogeneous and isotropic plasticity. All articles that solve complex shear problems essentially use the representation of stresses and displacements in the elastic zone in a complex form. In this research, the problems of complex shear are solved using conservation laws. It is assumed that the yield strength is a function of the coordinates of the point where the stress state is being studied. It is known that the elastic properties of structural materials can be homogeneous and isotropic, while their yield point and strength are inhomogeneous. This situation is observed, for example, in the case of neutron bombardment of structural materials. This research will examine exactly this situation. The article presents conservation laws for equations describing a complex shear. It was assumed that the components of the conserved current depend on the components of the stress tensor and coordinates. The components of the stress tensor are included in them linearly. The problem of finding the components of the conserved current was reduced to the Cauchy-Riemann system. The solution of this system allowed us to reduce the calculations of the stress tensor components to a curvilinear integral along the contour of the hole and thus find the boundary between the elastic and plastic areas.

Keyword: elastic-plastic problem, inhomogeneous plasticity, complex shear, conservation laws.

Введение. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих [1]. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода, возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика

упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г. П. Черепанов [1].

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге в случае однородной и изотропной пластичности посвящена обширная литература, ее обзор можно увидеть, например, в [1]. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения. Впервые задачи пластичности решались с помощью законов сохранения в работах [2–6]. В статьях [3, 7–12] методика законов сохранения была успешно применена к нахождению упругопластических стержнях и балках. В настоящей статье эта методика впервые использована для решения упругопластических задач. И при этом предполагается, что в пластической области предел текучести является функцией от координат точки, в которой исследуется напряженное состояние. Известно, что упругие свойства конструкционных материалов могут быть однородными и изотропными, а при этом их предел текучести и прочности – неоднородным. Такая ситуация наблюдается, например, при нейтронной бомбардировке конструкционных материалов [13]. В данной статье будет изучена именно такая ситуация.

1. Основные соотношения

Поля смещений и напряжений в рассматриваемом случае таковы [1]

$$u = v = 0, w = w(x, y), \tag{1}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau^1(x, y), \tau_{yz} = \tau^2(x, y)$$

Здесь *u, v, w* – компоненты вектора смещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, *x, y, z* – декартовы координаты, ось *z* направлена параллельно образующей.

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, \text{ (уравнение равновесия)} \tag{2}$$

$$\tau^1 = G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau^2 = G\frac{\partial w}{\partial y}, \text{ (закон Гука).} \tag{3}$$

Здесь *G* – постоянная, называемая модулем сдвига.

Из (2), (3) следуют соотношения в упругой зоне

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial y} = \frac{\partial \tau^2}{\partial x} \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует, что τ^1, τ^2 удовлетворяют уравнениям Коши – Римана

$$F_1 = \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, F_2 = \frac{\partial \tau^1}{\partial y} - \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

В пластической области имеет место соотношение (2), а также

$$(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \text{ (условие текучести),} \tag{7}$$

$$\tau^2 \frac{\partial w}{\partial x}, = \tau^1 \frac{\partial w}{\partial y} \text{ (уравнение Генки).} \tag{8}$$

Здесь *k(x,y)* – некоторая гладкая функция, равная пределу текучести при чистом сдвиге [13].

На границе упругой и пластической областей предполагаются непрерывными напряжения и смещения.

2. Законы сохранения. Законом сохранения для системы уравнений (6) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A\left(x,y,\tau^1,\tau^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial B\left(x,y,\tau^1,\tau^2\right)}{\partial y}=\omega^1F_1+\omega^2F_2, \tag{9}$$

где $\omega^i=\omega^i(x,y,\tau^1,\tau^2)$ – некоторые функции, одновременно не равные тождественно нулю.

Замечание. С более общим определением законов сохранения и их использованием в механике деформируемого твердого тела можно ознакомиться, например, в [4; 6; 14]. В работе [15] можно ознакомиться с применением техники группового анализа для построения решений для уравнений неоднородной теории упругости.

Для тех целей, которые поставлены в статье, вполне подойдет упрощенная формулировка в виде (9).

В случае (9), величины *A, B* называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты *A, B* имеют следующий вид

$$A=\alpha^1\tau^1+\beta^1\tau^2+\gamma^1, B=\alpha^2\tau^1+\beta^2\tau^2+\gamma^2, \tag{10}$$

где $\alpha^i=\alpha^i\left(x,y\right),\beta^i=\beta^i\left(x,y\right),\gamma^i=\gamma^i\left(x,y\right)$ – некоторые гладкие функции, подлежащие определению.

Подставим (10) в (9), в результате получаем

$$\begin{aligned}&\alpha^1_x\tau^1+\alpha^1\tau^1_x+\beta^1_x\tau^2+\beta^1\tau^2_x+\gamma^1_x+\alpha^2_y\tau^1+\alpha^2\tau^1_y+\beta^2_y\tau^2+\beta^2\tau^2_y+\gamma^2_y=\\&=\omega^1\left(\tau^1_x+\tau^2_y\right)+\omega^2\left(\tau^1_y-\tau^2_x\right)=0,\end{aligned} \tag{11}$$

где индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Из (11) получаем

$$\alpha^1=\omega^1,\beta^1=-\omega^2,\alpha^2=\omega^2,\beta^2=\omega^1,\alpha^1_x+\alpha^2_y=0,\beta^1_x+\beta^2_y=0,\gamma^1_x+\gamma^2_y=0. \tag{12}$$

Из (12), исключая ω^i, получаем

$$\alpha^1_x-\beta^1_y=0,\beta^1_x+\alpha^1_y=0,\gamma^1_x+\gamma^2_y=0. \tag{13}$$

В силу соотношений (12) компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A=\alpha^1\tau^1+\beta^1\tau^2+\gamma^1, B=-\beta^1\tau^1+\alpha^1\tau^2+\gamma^2. \tag{14}$$

Поскольку правая часть (9) равна нулю, то по формуле Грина получаем

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(A_x+B_y\right)dxdy=\int_{\partial S}Ady-Bdx=\\&=\int_{\partial S}(\alpha^1\tau^1+\beta^1\tau^2+\gamma^1)dy-\left(-\beta^1\tau^1+\alpha^1\tau^2+\gamma^2\right)dx=0.\end{aligned} \tag{15}$$

где S – область, ∂S – ее кусочно гладкая граница. Все функции, входящие в (15), предполагаются гладкими.

3. Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие. Пусть C – кусочно гладкий контур, к нему приложена нагрузка

$$l^1\tau^1+l^2\tau^2=\tau_n,\left|\tau_n\right|\le k. \tag{16}$$

где (l^1,l^2) – компоненты вектора нормали к контуру C. Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C (рис. 1).

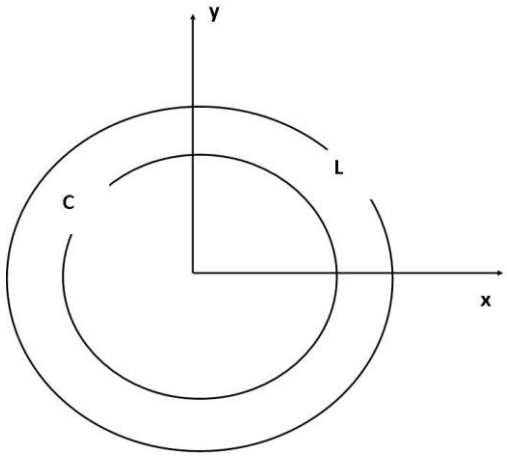

Рис. 1. Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие

Fig. 1. Elastic-plastic problem for an arbitrary hole in the case when the plastic area covers the entire hole

В этом случае на контуре *C*, кроме условия (16) выполняется и условие текучести (7). Таким образом на *C* имеют место два условия:

$$l^1\tau^1 + l^2\tau^2 = \tau_n, (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \quad (17)$$

Из условий (17) находим компоненты тензора напряжений на контуре *C*:

$$\tau^1 = \tau_n \pm l^2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \tau^2 = \tau_n l^2 \mp l^1\sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad (18)$$

В дальнейшем, для определенности, в формулах (18) будем выбирать верхний знак.

4. Использование законов сохранения для нахождения компонент тензора напряжений в области. Пусть точка $M(x_m, y_m)$ лежит вне контура *C*. Построим окружность радиуса ε с центром в точке *M*. Имеем $\varepsilon : (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \varepsilon^2$. Пусть *D* прямая, соединяющая точку *M* с контуром *C*. Получаем замкнутый контур, состоящий из окружности ε, прямой *D* и контура *C* (рис. 2).

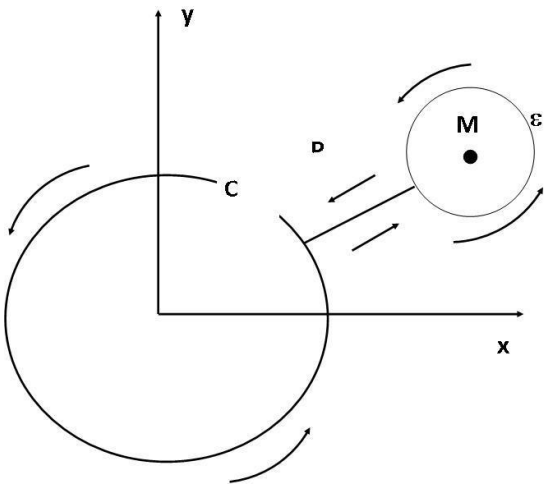

Рис. 2. Замкнутый контур, состоящий из окружности ε, прямой *D* и контура *C*

Fig. 2. Closed contour consisting of a circle ε, straight line *D*, and contour *C*

Из (15) получаем

$$\oint_C Ady - Bdx + \int_{D^+} Ady - Bdx + \int_{D^-} Ady - Bdx + \int_{\varepsilon} Ady - Bdx = 0. \tag{19}$$

Сумма второго и третьего слагаемых в (19) равна нулю, поскольку интегралы вычисляются в разных направлениях. Окончательно из (19) имеем

$$\int_C Ady - Bdx = -\oint_{\varepsilon} Ady - Bdx \tag{20}$$

Преобразуем правую часть уравнения (20), введя параметризацию $x = \varepsilon \cos\cos t, y = \varepsilon sint, 0 \le t \le 2\pi$. В результате имеем

$$\oint_{\varepsilon} Ady - Bdx = \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(Acost + Bsint \right) dt \tag{21}$$

.

Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \beta^1 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{22}$$

.

Тогда из (21) получаем

$$\int_{\varepsilon} A_1 dy - B_1 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(A_1 cost + B_1 sint \right) dt = \int_0^{2\pi} \tau^1 dt = 2\pi\tau^1 \left(x_m, y_m \right). \tag{23}$$

Последнее равенство в (23) получено с использованием теоремы о среднем при ε, стремящемся к нулю.

Пусть в (15)

$$\alpha^1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \beta^1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{24}$$

.

Тогда из (21) получаем

$$\oint_{\varepsilon} A_2 dy - B_2 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(A_2 cost + B_2 sint \right) dt = \int_0^{2\pi} \tau^2 dt = 2\pi\tau^2 \left(x_m, y_m \right). \tag{25}$$

Последнее равенство в (25) получено с использованием теоремы о среднем при ε, стремящемся к нулю.

Из формулы (20), а также из (23) и (25) получаем

$$\oint_C A_1 dy - B_1 dx = -2\pi\tau^1 \left(x_m, y_m \right), \oint_C A_2 dy - B_2 dx = -2\pi\tau^2 \left(x_m, y_m \right). \tag{26}$$

Формулы (26) дают возможность найти компоненты тензора напряжений в любой точке x_m, y_m вне контура *C*. Это позволяет установить границу между упругой и пластической областями. Если выполнено условие пластичности $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2$ в точке x_m, y_m, то эта точка принадлежит пластической области, если в точке выполнено условие $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 < k^2$, то упругой.

Замечание. Установленные выше формулы позволяют решать упруго пластические задачи, даже если пластический контур не полностью охватывает контур *C*, лишь бы на контуре *C* было выполнено условие пластичности (7).

.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго пластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983. 239 с.
2. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 3. С. 606–608.
3. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Упругопластические задачи для ортотропных сред / СибГУ им. М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2017. 116 с.

4. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001. 192 с.

5. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 139 с.

6. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев и др. М. : ФИЗМТЛИТ, 2008.

7. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Аналитическое решение задачи о волне нагрузки в упругопластическом стержне // Динамка сплошн. среды. 2012. Вып. 127.

8. Сенашов С. И., Филюшина Е. В., Гомонова О. В. Построение упругопластических границ с помощью законов сохранения // Вестник СибГАУ. 2015. Т.16, № 2. С. 343–359.

9. Сенашов С. И., Кондрин А. В. Разработка информационной системы для нахождения упругопластической границы стержней прокатного профиля // Вестник СибГАУ. 2014. № 4(56). С. 119–125.

10. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. № 3(49). С. 100–103.

11. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Elastoplastic Torsion of a Rod with MultiplyConnected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ. Math. & Physics. 2015. No. 7(1). P. 343–51.

12. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. On Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ. Math. & Physics. 2014. No. 7(2). P. 203–208.

13. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Неоднородная теория пластичности. М. : Мир, 1964. 156 с.

14. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. EdinburgMath. Soc. 1988. Vol. 3(2). P. 415–439.

15. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенвшов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск : Наука ; Сиб. отделение. 1985. Бытев 143 с.

References

1. Annin B. D., CHerepanov G. P. *Uprugo plasticheskaya zadacha*. [Elastic plastic task] Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 239 p.

2. Senashov S. I. [On the laws of conservation of plasticity equations]. *Dokl. AN SSSR*. 1991, Vol. 320, No. 3, P. 606–608 (In Russ.).

3. Senashov S. I., Filyushina E. V. *Uprugoplasticheskie zadachi dlya ortotropnyh sred*. [Elastic-plastic problems for orthotropic environments]. Krasnoyarsk, SibGU im. M. F. Reshetneva Publ., 2017, 116 p.

4. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yahno A. N. *Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravneniy*. [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2001, 192 p.

5. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yahno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernyh uravnenij ideal'noj plastichnosti*. [Mathematical problems of two-dimensional equations of ideal plasticity] Sib. gos. aerokosmich. un-t. Krasnoyarsk, 2012. 139 p.

6. Ivlev D. D. et al. *Predel'noe sostoyanie deformirovannyh tel i gornyh porod* [Limit state of deformed bodies and rocks]. Moscow, FIZMTLIT Publ., 2008.

7. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Analytical solution of the problem of the load wave in an elastic-plastic rod]. *Dinamika sploshn. sredy*. 2012, No. 127.

8. Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. [Building elastic-plastic boundaries using conservation laws]. *Vestnik SibGAU*. 2015, Vol. 16, No. 2, P. 343–359 (In Russ.).

9. Senashov S. I., Kondrin A. V. [Development of an information system for finding the elastic-plastic boundary of rolling profile rods]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 4(56), P. 119–125 (In Russ.).

10. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [About elastic-plastic torsion of a rod]. *Vestnik SibGAU*. 201, No. 3(49), P. 100–103 (In Russ.).

11. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Torsion of a Rod with MultiplyConnected Cross-Section. *J. Siberian Federal Univ. Math. & Physics*. 2015, No. 7(1), P. 343–351.

12. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. On Elastoplastic Bending of Beam. J. *Siberian Federal Univ. Math. & Physics*. 2014, No. 7(2), P. 203–208.

13. Ol'shak V., Mruz Z., Pezhina P. *Neodnorodnaya teoriya plastichnosti* [Heterogeneous theory of plasticity] Moscow, Mir Publ., 1964, 156 p.

14. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity. *Proc. EdinburgMath. Soc*. 1988, Vol. 3(2), P. 415–439.

15. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svojstva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1985, 143 p.

© Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Черепанова О. Н., 2020

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Черепанова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, исполняющая обязанности директора Института математики и фундаментальной информатики; Сибирский федеральный университет. E-mail: cheronik@mail.ru.

Senashov Sergei Ivanovich – D. Sc., Professor, Head of the Department of IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Cherepanova Olga Nikolaevna – Cand. Sc., associate Professor, acting Director of the Institute of Mathematics and Fundamental Informatics; Siberian Federal University. E-mail: cheronik@mail.ru.