Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 519.21
Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-170-175

For citation: Egorythev G. P., Shiryaeva T. A., Shlepkin A. K., Filippov K. A., Savostyanova I. L. On the location of spacecraft in a given number of orbit. *Siberian Journal of Science and Technology.* 2020, Vol. 21, No. 2, P. 170–175. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-170-175.

Для цитирования: О распределении космических аппаратов по заданному числу орбит / Г. П. Егорычев, Т. А. Ширяева, А. К.Шлепкин и др. // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 2. С. 170–175. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-170-175.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ ОРБИТ

Г. П. Егорычев[1], Т. А. Ширяева[2], А. К. Шлепкин[2]*, К. А. Филлипов[2], И. Л. Савостьянова[3]

[1] Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, просп. Свободный, 70
[2] Красноярский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 90
[3]Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
*E-mail: ak_kgau@mail.ru

Космические аппараты – дорогостоящий продукт. Например, только вывод такого аппарата на орбиту обходится минимум в сто миллионов долларов плюс стоимость самого спутника и научной аппаратуры, которую он несет. Однако современное состояние человеческой цивилизации уже не позволяет обходиться без наличия космических аппаратов на орбите. В международной базе данных на март 2019 г. числилось 2062 действующих спутника. По сравнению с 2018 г. рост числа новых аппаратов составил 15 %. Эксперты предупреждают, что в ближайшие годы мир ожидает «спутниковый бум» с прогнозируемым приростом количества аппаратов порядка 15–30 % ежегодно. Все эти космические аппараты сильно отличаются друг от друга. В настоящее время используется несколько орбит для размещения на них спутников в зависимости от решаемых ими задач. Геостационарная орбита используется для прямого телевещания. Низкие спутниковые орбиты используются для связи между спутниковыми телефонами. Свои орбиты существуют для спутников систем навигации (GPS, Navstar, ГЛОНАСС), военных спутников, спутников для различных научных исследований. Естественно, в этих условиях возникает задача распределения космических аппаратов по заданному числу орбит при некоторых ограничениях на нахождении космического аппарата на некоторых орбитах в зависимости от назначения космического аппарата. Рассматривается решение данной задачи при условии, что число космических аппаратов совпадает с числом возможных орбит, на которых эти космические аппараты могут находиться при некоторых дополнительных ограничениях на возможность расположения спутника на орбите. Получено несколько решений этой задачи, позволяющих вычислить число возможных комбинаций для таких распределений космических аппаратов по заданному числу орбит.

Ключевые слова: спутник, орбита, подстановка, перманент.

ON THE LOCATION OF SPACECRAFT IN A GIVEN NUMBER OF ORBITS

G. P. Egorythev[1], T. A. Shiryaeva[2], A. K. Shlepkin[2]*, K. A. Filippov[2], I. L. Savostyanova[3]

[1] Siberian Federal University
70, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
[2] Krasnoyarsk State Agrarian University
90, Mira Av., Krasnoyarsk, 660049, Russian Federation
[3] Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: ak_kgau@mail.ru

Space vehicles are an expensive product. For example, just putting such a device into orbit costs at least one hundred million dollars plus the cost of the satellite itself and scientific equipment it carries. However, the current state of human civilization does not allow us to do without the presence of satellites in orbit. There were 2,062 active satellites in the international database as of March 2019. Compared to 2018, the number of new devices increased by 15%. Experts warn that in the coming years, the world is expecting a «satellite boom» with a projected increase in the number of devices of about 15-30% annually. All these satellites are rather different. Currently, several orbits are used for placing satellites on them, depending on the tasks they solve. A geostationary orbit is used for live television broadcasting. Low satellite orbits are used for communication between satellite phones. There are some orbits for navigation systems (GPS, Navstar, GLONASS). Naturally, under these conditions, there is a problem of placing spacecraft over a given number of orbits, with some restrictions on the location of the spacecraft in certain orbits, depending on the purpose of the spacecraft. The solution to this problem is considered on the condition that the number of spacecraft coincides with the number of possible orbits in which they can be placed with some additional restrictions on the possibility of their placement in orbit. Several solutions to this problem are obtained that allow us to calculate the number of possible combinations for such placement of spacecraft over a given number of orbits.

Keywords: satellite, orbit, substitution, permanent.

1. Введение. В международной базе данных на март 2019 г. числилось 2062 действующих спутника. По сравнению с 2018 г. рост числа новых аппаратов составил 15 %. Эксперты предупреждают, что в ближайшие годы мир ожидает «спутниковый бум» с прогнозируемым приростом количества аппаратов порядка 15–30 % ежегодно. Уже в настоящее время такие компании как SpaceX и OneWeb осуществляют обширную программу запуска спутников на низкие околоземные орбиты для осуществления планов создания глобальной сети интернет-вещания.

При этом, естественно, возникает ряд задач [1–6], в частности, задача о выборе наиболее благоприятных орбит для космических аппаратов того или иного класса, а также задача распределения заданного количества спутников по заданному множеству орбит при существующих запретах на нахождении спутника на некоторых орбита. В статье приведено решение второй задачи при следующих условиях: число спутников n совпадает с числом возможных орбит нахождения на них спутников; каждому спутнику запрещено находиться ровно на одной орбите; два спутника не могут находиться на одной орбите. Приводится формула, позволяющая вычислить число возможных комбинаций для таких распределений спутников по орбитам.

Математическая модель задачи. Под подстановкой будем понимать матрицу размерности $2\times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots & n \\ i_1 & i_2\cdots & i_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Подстановка называется регулярной, если $k \neq i_k$, т. е.

$$i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \cdots, i_n \neq n. \tag{2}$$

Таким образом, каждому варианту расположения спутников на орбитах, в соответствии с ограничениями, указанными выше, будет соответствовать в точности одна регулярная подстановка степени *n*. Задача нахождения числа регулярных подстановок степени *n* относится к обширному классу задач перечисления подстановок с ограничениями на позиции (с запрещенными позициями) и известна в литературе под именем задачи о беспорядках (leproblemdesrecontres [7]). Она эквивалентна классической проблеме перечисления латинских прямоугольников размера $2\times n$. Для нее как проблемы перечислительной комбинаторики известно множество решений различного типа [8]. В статье приведено несколько таких решений, проведенных различными методами, каждое из которых имеет самостоятельное значение.

2. Рекуррентная формула для вычисления числа регулярных подстановок. Число регулярных подстановок степени *n* будем обозначать через D_n.

Теорема 1. Если $n=1$, то $D_1=0$. Если $n=2$, то $D_2=1$. Если $n>2$, то

$$D_n = n! - C_n^1 D_{(n-1)} - C_n^2 D_{(n-2)} - \cdots - C_n^{(n-2)} D_{n-(n-2)} - 1.$$

Доказательство. Первые два утверждения теоремы являются непосредственным следствием определения регулярной подстановки. Пусть $n>2$. Рассмотрим нерегулярную подстановку

$$\begin{pmatrix} 1\cdots n_1 \cdots n_k \cdots & n \\ \alpha_1 \cdots n_1 \cdots n_k \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

которая фиксирует ровно *k* символов $n_1, n_2, \cdots, n_k$, а все оставшиеся символы (в количестве $k-1$) перемещает. При фиксированных $n_1, n_2, \cdots, n_k$ число таких подстановок равно D_{n-k}. Поскольку число различных наборов без повторений длины *k* из множества $\{1, \cdots, n\}$ равно C_n^k, то общее число нерегулярных подстановок такого вида равно C_n^k. Для завершения доказательства теоремы достаточно из общего числа подстановок степени *n* (а это в точности $n!$) вычесть все нерегулярные подстановки рассмотренного выше вида по всем *k*.

Терема доказана.

Проверим утверждения теоремы для некоторых начальных значений $n=1,2,3,4,5,6$. Значения $D_1=0$ и $D_2=1$следуют непосредственно из определения

$$D_3 = 3! - C_3^1 D_2 - 1 = 6 - 3 - 1 = 2,$$

$$D_4 = 4! - C_4^1 D_3 - C_4^2 D_2 - 1 = 24 - 4\cdot 2 - 6\cdot 1 - 1 = 9,$$

$$D_5 = 5! - C_5^1 D_4 - C_5^2 D_3 - C_5^3 D_2 - 1 =$$
$$= 120 - 5\cdot 9 - 10\cdot 2 - 10 - 1 = 44,$$

$$D_6 = 6! - C_6^1 D_5 - C_6^2 D_4 - C_6^3 D_3 - C_6^4 D_2 - 1 =$$
$$= 720 - 6\cdot 44 - 15\cdot 9 - 20\cdot 2 - 15\cdot 1 - 1 = 265.$$

Данные результаты были подтверждены путем перечисления всех регулярных подстановок для указанных значений $n=1,2,3,4,5,6$.

3. Формулы для вычисления числа регулярных подстановок на основе понятия перманента матрицы. Здесь мы рассматриваем исходную задачу как проблему перечисления при подсчете числа подстановок с фиксированными позициями и используем аппарат перманентов (циклических) *(0,1)* матриц инцидентности [9; 10]. Под перманентом квадратной $n \times n$ матрицы $A = \left(a_{i,j}\right)$ над коммутативным кольцом понимается выражение

$$per\left(A\right) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{3}$$

где суммирование проведено по всем S_n перестановкам $\sigma = \left(\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\right)$ *n*-множества $\{1, 2, \cdots, n\}$, или, что то же, по всем диагоналям матрицы *A*.

Пусть I_n – единичная $n \times n$-матрица, J_n – $n \times n$-матрица, у которой каждый элемент равен $1/n$, и $A_n = (nJ_n - I_n)$ – следующая матрица порядка *n*:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 2. Следующая формула для числа D_n справедлива

$$D_n = per\left(A_n\right) = per\left(nJ_n - I_n\right), n = 2, 3, \cdots. \tag{5}$$

Доказательство. Матрица инцидентности $A_n = \left(a_{ij}\right)$ порядка *n* в (4) построена таким образом, что в соответствии с условиями (2) в ней положено $a_{ij} = 0$, если $i = j$, и $a_{ij} = 1$, если $i \neq j$. Легко видеть, что каждой «единичной» диагонали матрицы A_n в (4), каждый член которой равен *1*, взаимно однозначно соответствует подстановка типа (2). С другой стороны очевидно, что в каждой такой диагонали в перманентной сумме (3) для $per(A_n)$ соответствует произведение *n* единиц, равное *1.* В то же время соответствующие произведения членов для каждой диагонали матрицы A_n, содержащие хотя бы один нулевой элемент, равны нулю.

Теорема доказана.

Теорема 3. Следующая формула для числа D_n справедлива

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \left(-1)^n \frac{1}{n!}\right), n = 2, 3, \cdots. \tag{6}$$

Доказательство. По «перманентной» формуле Лапласа, разлагая $per\left(A_n\right)$ по элементам первой строки, имеем

$$D_n = per\left(A_n\right) = \sum_{k=2}^{n} per\left(A_n\left(1/k\right)\right), n = 3, 4, \cdots. \tag{7}$$

Здесь $per\left(A_n\left(1/k\right)\right)\left(k = 2, 3, \cdots, n\right)$ – перманентные миноры от *(0,1)* матриц $A_n\left(1/k\right)$ порядка $(n-1)$, которые отличаются лишь порядком расположения одних и тех же *(0,1)*-строк. При этом каждая из матриц $A_n\left(1/k\right)$ содержит ровно $(n-2)$ нулей и не какие два из них не содержатся в одной строке или в одном столбце. Отсюда следует, что при любом $k = 2, 3, \cdots, n$ справедливо равенство

$$per\left(A_n\left(1/k\right)\right) = per\left(A_{n-1}\right) - per\left(A_{n-2}\right),$$

и согласно (7) и (5) мы получаем

$$D_n = (n-1)\left(per\left(A_{n-1}\right) - per\left(A_{n-2}\right)\right) = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right), n = 3, 4, \cdots, n \tag{8}$$

Отсюда, по индукции, с учетом начальных условий $D_1 = 0, D_2 = 1,$ следует формула (6).

Теорема доказана.

4. Вывод формулы для вычисления числа регулярных подстановок на основе формулы включения-исключения. Данное решение связано с классической формулой включения-исключения [10], путем разбиения множества S_n на непересекающиеся множества $P_0, P_1, \cdots, P_n$, где P_i – множество подстановок из S_n с точно i фиксированными позициями, $i = 1, 2, \cdots, n$ или, что то же, с $(n-i)$ запрещенными позициями. Поскольку

$$S_n = n! = \sum_{i=0}^{n} |P_i|, |P_i| = \binom{n}{i} D_{n-i}, \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

то имеем

$$1 = \sum_{i=o}^{n} D_{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!}. \tag{9}$$

Пусть

$$\tilde{D}_z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_i}{i!}$$

– производящая функция степенного (экспоненциального) типа для числовой последовательности $\left\{ D_i \middle/ i! \right\}$ и, соответственно,

$$D_i = i! rez \left\{ \tilde{D}(z) z^{-i-1} \right\}, i = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

Здесь под оператором формального вычета $res_z \left\{ A(z) \right\}$ для степенного ряда Лорана

$$A(z) = \sum_{k=r}^{\infty} a_k z^k, r \in Z,$$

понимается коэффициент при z^{-1} у ряда $A(z)$, т. е. по определению

$$res_z \left\{ A(z) \right\} = a_{-1.} \tag{11}$$

Далее, в соответствии с методом коэффициентов [11], положим в (9)

$$\frac{1}{i!} = res_w \left\{ e^w w^{-i-1} \right\}, \frac{D_{n-i}}{(n-1)!} = res_z \left\{ \tilde{D}(z) z^{-(n-k)-1} \right\},$$

и последовательно получаем

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \left(res_w \left\{ e^w w^{-i-1} \right\} \times res_z \left\{ \tilde{D}(z) z^{-(n-k)-1} \right\} \right) = \sum_{i=0}^{n} \cdots,$$

где в последнем равенстве добавленные члены суммы равны *0* по определению оператора res_z. Далее, проводя перегруппировку членов суммы и занесения оператора Σ под знак оператора res_z, получаем

$$1 = res_z \{ \tilde{D}(z) z^{-n-1} [\sum_{i=0}^{\infty} z^w \left(res_w \left\{ e^w w^{-i-1} \right\}] \right) \} =$$

(суммирование в квадратных скобках по индексу *i*: правило подстановки, замена $w = z$)

$$= res_z \{ \tilde{D}(z) z^{-n-1} [e^w]_{w=z} \} = res_z \left\{ e^z \tilde{D}(z) z^{-n-1} \right\}.$$

Т. е. есть имеем

$$res_z\left\{e^z \tilde{D}(z) z^{-n-1}\right\}=1 \rightarrow := res_z\left\{\frac{1}{1-z} z^{-n-1}\right\}, n=0,1,\cdots$$

Отсюда сразу следует, что

$$e^z \tilde{D}(z)=\frac{1}{1-z}, \tilde{D}(z)=\frac{e^{-1}}{1-z},$$

и согласно (10)

$$D_n=n!res_z\left\{\tilde{D}(z) z^{-n-1}\right\}=n!res_z\left\{e^z \frac{1}{1-z} z^{-n-1}\right\}=$$

$$=n!res_z\left\{\left(1+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{z^i}{i!}\right) \times\left(1+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i z^i\right) z^{-n-1}\right\}=$$

(по определению оператора res_z)

$$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\left(-1)^n \frac{1}{n!}\right), n=1,2,3,\cdots.$$

5. Вывод формулы для вычисления числа регулярных подстановок на основе комбинаторных методов. Данное решение связано с применением традиционных средств комбинаторного анализа и аппарата производящих функций степенного типа, связанного с применением операций над степенными рядами [8; 11; 12]. Пусть Q_n – множество всех *n*-подстановок типа (2), а $Q_n(k)$ – множество таких подстановок из Q_n, у которых $1 \rightarrow k(k=2,3,\cdots,n)$. Очевидно, что совокупность множеств $Q_n(k)$ есть разбиение множества S_n. Положим

$$Q_n(k)=Q_n^1(k) \cup Q_n^2(k),$$

где множество $Q_n^1(k)$ содержит все подстановки из $Q_n(k)$, у которых *k* не отображается в 1, а множество $Q_n^2(k)$ содержит все подстановки из $Q_n(k)$, у которых *k* отображается в 1.

Ясно, что для каждого фиксированного *k* имеем

$$\left|Q_n^1(k)\right|=D_{n-1},\left|Q_n^2(k)\right|=D_{n-2},$$

и, соответственно,

$$Q_n(k)=D_{n-1}+D_{n-2}.$$

Таким образом, мы имеем

$$D_n\left|Q_n\right|=\sum_{k=0}^n Q_n(k)=\sum_{k=0}^n(D_{n-1}+D_{n-2}), n=3,4, \tag{12}$$

т. е. рекуррентная формула (8) с учетом начальных условий вида

$$D_1=0, D_2=1, \tag{13}$$

при $n \geq 3$ верна.

Решение системы (12) – (13). Если поделить обе части равенства (12) на $(n-1)!$, умножить на z^{n-1} и просуммировать при $n \geq 3$, то с учетом обозначений

$$\tilde{D}_n={D_n}/{n!}, n \geq 1$$

получим уравнение вида

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_n}{(n-1)!}z^{n-1}=z\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_{n-1}}{(n-2)!}z^{n-1}+z\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_{n-2}}{(n-2)!}z^{n-2}. \tag{14}$$

Далее из (14) учетом начальных условий (13) и новых обозначений

$$\tilde{D}_n := D_n/n!, n\geq 2, \tilde{D}(z):=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\frac{\tilde{D}_n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}z^n,$$

получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_n}{(n-1)!}z^{n-1}-z\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_{n-1}}{(n-2)!}z^{n-2}=-z^2D_2+(1-z)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_n}{(n-1)!}z^{n-1}=\\&=-z^2+(1-z)\frac{d}{dz}\{\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_n}{n!}z^n\}=-z^2+(1-z)\frac{d}{dz}\left\{\tilde{D}(z)-D_2z^2\right\}=\\&=-z^2+(1-z)\frac{d}{dz}\left\{\tilde{D}(z)\right\}-(1-z)\frac{1}{2}2z=\\&=-z^2+(1-z)\frac{d}{dz}\left\{\tilde{D}(z)-D_2z^2\right\}=-z+(1-z)\frac{d}{dz}\left\{\tilde{D}(z)\right\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&z\sum_{n=3}^{\infty}\frac{D_{n-2}}{(n-2)!}z^{n-2}=z\sum_{n=3}^{\infty}\tilde{D}_{n-2}\,z^{n-2}=\\&=z\sum_{n=3}^{\infty}\tilde{D}_{n-2}\,z^{n-2}=z\left\{\tilde{D}(z)-z\,\tilde{D}_1\,z\right\}=z\,\tilde{D}(z).\end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, решение системы (12) – (13) в силу (14) – (16) сводится к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$(1-z)\frac{d}{dz}\left\{\tilde{D}(z)\right\}-z\,\tilde{D}(z)-z=0, \tilde{D}(0)=\tilde{D}'(0)=0. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет следующее единственное решение

$$\tilde{D}(z)=-1+e^{-z}\frac{1}{1-z}, \tag{18}$$

проверка справедливости которого осуществляется непосредственной подстановкой в (17). Концовка доказательства проводится точно так же как в разделе 4.

6. Замечания. Из разложения Маклорена для числа e^{-1} сразу следует известная следующая важная оценка числа D_n:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!}=\frac{1}{e}. \tag{19}$$

М. Айгнер в 1979 г. нашел следующую неожиданную вероятностную интерпретацию той асимптотической оценки числа D_n: «допустим что *n* страниц рукописи были перепутаны порывом ветра и сложены затем произвольно. Формула (19) утверждает, что при больших *n* вероятность того, что нет ни одной страницы на своем месте, больше $1/3$. » [13].

Другой, более трудной классической комбинаторной проблемой того же типа является задача о супружеских парах: сколькими способами можно расположить за круглым столом *n* супружеских пар так, чтобы женщины и мужчины чередовались, и ни одна жена не сидела рядом со своим мужем?

Жак Тушар в 1934 г. путем перечисления *n*-перестановок соответствующего типа нашел следующую формулу для числа U_n способов размещения супружеских пар указанного выше типа [14; 15]:

$$U_n = per\left(nJ_n - I_n - P_n\right) = \sum_{i=0}^{n} -1^i \frac{2n}{2n-1}\binom{n-i}{i}\left(n-1\right)!, \qquad (20)$$

где матрица P_n – матрица перестановок степени n с единицей на местах $\left(1,2\right),\left(2,3\right),\cdots,...$

Отметим, что формула (20), как и формула (6), также может быть использована для подсчета вариантов расположения спутников на заданном числе орбит с различным набором условий.

7. Заключение. Решена задача о возможном распределении космических аппаратов по заданному числу орбит в зависимости от назначения космического аппарата. При этом предполагается, что число космических аппаратов совпадает с числом орбит, на которых эти космические аппараты могут находиться. Получено несколько решений этой задачи, позволяющих вычислить число комбинаций для таких распределений космических аппаратов по заданному числу орбит.

Библиографические ссылки

1. Dr. Kelso T. S. Basics of the Geostationari Orbit [Электронный ресурс]. URL: http://www.celestrak.com/columns (дата обращения 26.03.2020).
2. Договор о принципах деятельности государств по исследованию и использованию космического пространства, включая Луну и другие небесные тела (1967) [Электронный ресурс] / Офиц. сайт ООН. URL: http://www.un.org/ru/documents/decl_conv/conventions/outer_space_goveming.html (дата обращения 26.03.2020).
3. Фатеев В. Ф., Миньков С. Новое направление развития МКА дистанционного зондирования Земли. // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47, No. 3. С. 18–22.
4. Лебедев А. А., Нестеренко О. П. Космические системы наблюдения. Синтез и моделирование. М. : Машиностроение, 1991. 224 с.
5. Подъездков Ю. А. Космическая съемка Земли 2006–2007 гг. М. : Радиотехника, 2008. 275 с.
6. Невдяев Л. М., Смирнов А. А. Персональная спутниковая связь. М. : Эко-Трендз, 1998. 216 с.
7. Fitken A. C. Determinants and Matrices. Edinburgh, 1939. 201 c.
8. Riordan J. An introductions to combinatorial analysis // John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982. 288 p.
9. Minc H. Permanents // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 1978. Vol. 6. P. 65–70.
10. Егорычев Г. П. Дискретная математика. Перманенты. Красноярск : Изд-во СФУ, 2007. 272 с.
11. Egorychev G. P. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск : Наука, 1977.
12. Kuzmin O. V. Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics. Irkutsk : ISU Publishing House, 2012. 113 p.
13. Aigner M. Combinatorial theory. Springer-Verlag, New York, 1979. 90 p.
14. Touchard J. Sur un proble’me de permutations / ed. C. R. Acad. Sci. Paris, 1934.
15. Kaplansky I. Solution of the proble’me des me’nages // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 49. P. 784–785.

References

1. Dr. Kelso T. S. Basics of the Geostationari Orbit. Available at: http://www.celestrak.com/columns. (accessed 26.03.2020).
2. Treaty on principles governing the activities of States in the exploration and use of outer space, including the moon and other celestial bodies. Available at: http://www.un.org/ru/documents/decl_conv/conventions/outer_space_goveming.html (accessed 26.03.2020)
3. Fateev V. F., Minkov S. [New direction of development of remote sensing of the Earth]. *Izv. vuzov. Instrument making*. 2004, Vol. 47, No. 3, P. 18–22 (In Russ.).
4. Lebedeva A. A., Nesterenko O. P. *Kosmicheskie sistemy nablyudeniya. Sintez i modelirovanie* [Space observation systems. Synthesis and modeling]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 224 p.
5. Pob'ezdkov Yu. A. *Kosmicheskaya s"emka Zemli 2006–2007 gg.* [Space survey of the Earth 2006–2007]. Moscow, Radio engineering Publ., 2008, 275 p.
6. Nevdyaevl L. M., Smirnova A. A. *Personal'naya sputnikovaya svyaz* [Personal satellite communication]. Moscow, Eco-Trends Publ., 1998, 216 p.
7. Fitken A. C. Determinants and Matrices. Edinburgh, 1939, 201 p.
8. Riordan J. An introductions to combinatorial analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982, 288 p.
9. Minc H. Permanents. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. 1978, Vol. 6, P. 65–70 p.
10. Egorychev G. P. *Diskretnaya matematika. Permanenty* [Discrete Math. Permanents]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University Publ., 2007, 272 p.
11. Egorychev G. P. *Integralnoe predstavlenie i vychislenie kombinatornyh summ* [Integral representation and computation of combinatorial Math.]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1977.
12. Kuzmin O. V. Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics. Irkutsk, ISU Publishing House, 2012, 113 p.
13. Aigner M. Combinatorial theory, Springer-Verlag, New York, 1979, 90 p.
14. Touchard J. Sur un proble'me de permutations. Ed. C. R. Acad. Sci. Paris, 1934.
15. Kaplansky I. Solution of the proble'me des me'nages. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943, Vol. 49, P. 784–785 p.

Егорычев Георгий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор; Сибирский федеральный университет. E-mail: egorychev@sfu-kras.ru.

Ширяева Тамара Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент; Красноярский государственный аграрный университет. E-mail: tas_sfu@mail.ru.

Шлепкин Анатолий Константинович – доктор физико-математических наук, профессор; Красноярский государственный аграрный университет. E-mail: ak_kgau@mail.ru.

Филиппов Константин Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент; Красноярский государственный аграрный университет. E-mail: filippov_kostya@mail.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Egorychev Georgiy Petrovich – D. Sc., Professor, Siberian Federal University. E-mail: egorychev@sfu-kras.ru.

Shiryaeva Tamara Alekseevna – candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, associate Professor of the Department Information technologies and mathematical support of information systems; Krasnoyarsk State Agrarian University. E-mail: info@kgau.ru.

Shlepkin Anatoly Konstantinovich – D. Sc., Professor, Professor of the Department Higher mathematics and computer modeling; Krasnoyarsk State Agrarian University. E-mail: ak_kgau@mail.ru.

Filippov Konstantin Anatolevich – D. Sc., associate Professor, Professor of the Department Information technologies and mathematical support of information systems; Krasnoyarsk State Agrarian University. E-mail: info@kgau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor of the Department of IES; Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.