

Данный текст является русскоязычной версией опубликованной на английском языке статьи и представлен в авторской редакции только на данном сайте!

UDC 517.958:531.32

Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-1-8-14

For citation: Ivanov V. A., Erkaev N. V. Semi-analytical method for calculating elastic-hydrodynamic contact. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, Vol. 21, No. 1, P. 8–14. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-1-8-14

Для цитирования: Иванов В. А., Еркаев Н. В. Полуаналитический метод расчета упругогидродинамического контакта // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21, № 1. С. 8–14. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-1-8-14

SEMI-ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING ELASTIC-HYDRODYNAMIC CONTACT

V. A. Ivanov^{1, 3*}, N. V. Erkaev^{2, 3}

¹Institute of Computational Technologies SB RAS
6, Akademika Lavrentyeva St., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

²Institute of Computational Modeling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation

³Siberian Federal University, Polytechnic Institute
26, Akademika Kirenskogo St., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation

*E-mail: VinTextrim@yandex.ru

A semi-analytical method for calculating elastic-hydrodynamic contact based on the partial use of Computer Aided Design / Computer Aided Engineering (CAD / CAE) packages and solutions of the integral equation of functional relationship between pressure and deformation have been described. The pressure in the lubricating layer is described by solving the modernized Reynolds equation taking into account the factors such as elastic deformation of surfaces in the contact zone, cavitation effect in the low-pressure region, and variable viscosity of the lubricant layer, which depends on thermodynamic parameters. Based on the stationary solution, a tensor damping coefficient has been obtained, with the help of which calculations of transient non-stationary modes that occur in cases of a sharp change in the external load have been further performed. A comparison of the results of modeling a plain bearing obtained by using the proposed semi-analytical method has been made and the full calculation performed using CAD / CAE programs such as ANSYS and COMSOL Multiphysics. The comparison showed good convergence of all numerical methods. At the same time, the “hybrid” method showed a number of advantages over direct calculations in CAD / CAE packages, such as: faster calculation speed, low requirements for computing resources and accounting for the cavitation effect. The described semi-analytical method allows to create digital twins of bearing units, centrifugal pumps and hydraulic supports used in satellite cooling systems and in rotary mechanisms of ground-based satellite dishes.

Keyword: hybrid modeling, digital twins, elastic-hydrodynamic contact.

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА

В. А. Иванов^{1, 3*}, Н. В. Еркаев^{2, 3}

¹Институт вычислительных технологий СО РАН
Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6

²Институт вычислительного моделирования СО РАН

Российская Федерация, г. Красноярск, Академгородок, 55, стр. 44

³Сибирский федеральный университет, Политехнический институт
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26

*E-mail: VinTextrim@yandex.ru

Описан полуаналитический метод расчета упругогидродинамического контакта, основанный на частичном использовании Computer Aided Design / Computer Aided Engineering (CAD/CAE) пакетов и решения интегрального уравнения функциональной связи между давлением и деформацией. Давление в смазочном слое описывается решением модернизированного уравнения Рейнольдса с учетом таких факторов, как упругая деформация поверхностей в зоне контакта, эффект кавитации в области низкого давления, переменная вязкость смазочного слоя, зависящая от термодинамических параметров. На основе стационарного решения получен тензорный коэффициент демпфирования, с помощью которого далее выполняются расчеты переходных нестационарных режимов, возникающих в случаях резкого изменения внешней нагрузки. Проведено сравнение результатов моделирования подшипника скольжения, полученных с помощью предложенного полуаналитического метода и полного расчета, выполненного с помощью CAD/CAE программ, таких как ANSYS и COMSOL Multiphysics. Сравнение показало хорошую сходимость всех численных методов. При этом «гибридный» метод показал ряд преимуществ по сравнению с прямыми расчетами в CAD/CAE пакетах, таких как более быстрая скорость расчета, невысокие требования к вычислительным ресурсам и учет кавитационного эффекта. Описанный полуаналитический метод позволяет создавать цифровые двойники подшипниковых узлов, центробежных насосов и гидроопор, использующихся в спутниковых системах охлаждения и поворотных механизмах наземных спутниковых антенн.

Ключевые слова: гибридное моделирование, цифровые двойники, упругогидродинамический контакт.

Введение. В современном мире практически любой инженер, проектирующий подвижную механическую систему, сталкивается с решением контактных задач в узлах трения. Современные тренды проектирования узлов трения летательных аппаратов ставят жесткие условия: максимальное облегчение узла при полном сохранении его прочностных качеств. Одними из самых сложных являются контактные задачи упругогидродинамического взаимодействия двух тел, так как требуют одновременного учета множества факторов, таких как деформация упругих поверхностей, зависящая от давления и температуры вязкость жидкого слоя и вспенивание смазочного материала в зонах низкого давления. Наибольшую сложность в решение упругогидродинамической задачи вносит деформация упругой поверхности, так как при больших нагрузках она существенно влияет на величину геометрического зазора в жидком слое. Существует ряд приближенных аналитических решений таких задач [1–6], полученных в рамках упрощающих допущений, которые не позволяют решить контактную задачу с высокой точностью. В настоящее время широкое распространение получили различные мультидисциплинарные программные CAD/CAE (CAD – Computer Aided Design – компьютерная поддержка конструирования, CAE – Computer Aided Engineering – компьютерная поддержка инженерного анализа) комплексы (ANSYS, SolidWorks, COMSOL Multiphysics и т. д.). Однако применение таких комплексов для расчета нестационарных упругогидродинамических задач наталкивается на

значительные трудности, обусловленные наличием очень тонких слоев, огромными перепадами давления и жесткостью нестационарных задач, требующих выбора очень мелких шагов по времени и пространству. Все это приводит к очень большим вычислительным и временным затратам. В этом случае, для решения конкретных инженерных задач имеет смысл сочетать аналитические методы с ограниченным численным моделированием. Такой подход «гибридного» моделирования позволяет строить полную цифровую динамическую модель проектируемого или же реального узла и изучать его работоспособность при изменении различных внешних факторов. Это особенно актуально для трудно доступных или полностью необслуживаемых узлов, таких как центробежные насосы, использующиеся для систем охлаждения на космических аппаратах [7]. В качестве примера для описания методики решения задач будем использовать подшипник скольжения, схематично изображенный на рис. 1.

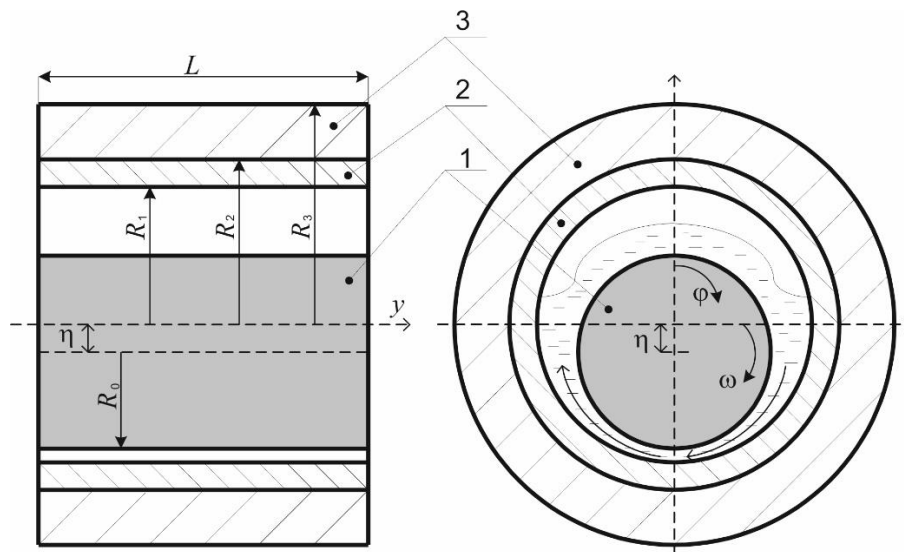


Рис. 1. Геометрическая схема подшипника скольжения:
1 – вал; 2 – бронзовый вкладыш; 3 – корпус

Fig. 1. Geometric diagram of a plain bearing:
1 – shaft; 2 – bronze liner; 3 – case

Здесь ω – угловая скорость вращения вала; φ – азимутальный угол, отсчитываемый в направлении часовой стрелки от точки максимального зазора; η и R_0 – эксцентриситет и радиус цилиндрического вала; R_1 – внутренний радиус вкладыша; R_2 и R_3 – внутренний и внешний радиусы цилиндрического корпуса; L – длина подшипника. В расчетах используем нулевые граничные условия для деформаций на заданной внешней границе корпуса подшипника. Между валом и вкладышем располагается тонкий слой жидкой смазки, называемый смазочным слоем. Также ставим нулевые граничные условия для давления на торцах подшипника.

Разделение упругой и гидродинамической задач. Одним из перспективных путей упрощения общей упругогидродинамической задачи является разбиение ее на последовательно решаемые более простые задачи: гидродинамическую задачу, связанную с определением давления в жидком слое, и контактную задачу, основанную на определении упругой деформации.

Связь упругой деформации и давления в общем виде можно представить в следующем виде:

$$\delta(x) = \int_{\Omega} P(x') K(x - x') d\Omega, \quad (1)$$

где δ и P – прогиб поверхности и соответствующее давление; Ω – площадка контакта. Функцию $K(x - x')$, являющуюся ядром линейного функционала, будем называть функцией податливости.

Функция податливости $K(x - x')$ является ключевым элементом в данном методе решения упругогидродинамической задачи. Важно отметить, что эту функцию можно определить независимо от решения гидродинамической задачи. Так, задавая некоторое распределение давления на границе тел, можно определить соответствующую функцию прогиба δ в результате решения задачи упругости для тел контакта. Далее, при известных функциях δ и P равенство (1) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $K(x - x')$, которое можно решать путем разложения по некоторому ортогональному базису:

$$K(x - x') = \sum_{k=0}^n [M_k \Phi_k(x - x') + N_k \Psi_k(x - x')], \quad (2)$$

где M_k и N_k – коэффициенты ортогонального разложения. В большинстве случаев область Ω можно считать прямоугольной и выбирать тригонометрические функции в качестве базисных, для которых справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x - x') &= \Phi_k(x) \Psi_k(x') - \Psi_k(x) \Phi_k(x'), \\ \Psi_k(x - x') &= \Psi_k(x) \Psi_k(x') + \Phi_k(x) \Phi_k(x'). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \|\Phi_k\|^2 [M_k (P \cdot \Phi_k) + N_k (P \cdot \Psi_k)] &= (\delta \cdot \Phi_k), \\ \|\Psi_k\|^2 [M_k (P \cdot \Psi_k) - N_k (P \cdot \Phi_k)] &= (\delta \cdot \Psi_k). \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\|\Phi_k\|^2 = \|\Psi_k\|^2 = (\Phi_k \cdot \Phi_k) = (\Psi_k \cdot \Psi_k). \quad (5)$$

В результате решения системы (4) вычисляются коэффициенты ортогонального разложения M_k и N_k , тем самым определяется функция податливости (2). Важно отметить, что восстановление функции податливости является «некорректной задачей» [8], в которой мелкомасштабные погрешности в исходных данных вызывают значительные отклонения в итоговых результатах. Поэтому для сглаживания функции податливости необходимо применять регуляризацию [9].

Расчет давления. Распределение давления P в смазочном слое определяется из уравнения Рейнольдса [10]

$$\operatorname{div} \left[\frac{h^3}{12\mu} \nabla P \right] = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} h) + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (6)$$

где h – толщина жидкого слоя; V – сумма скоростей тел в точке контакта

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

При этом толщина жидкого слоя h учитывает как геометрический зазор между контактирующими телами h_g , так и деформацию упругой δ поверхности, вызванную избыточным давлением в слое.

$$\begin{aligned} h &= 1 + \eta \cos(\varphi) + \int_0^{2\pi} P(\varphi') K(\varphi - \varphi') d\varphi, \quad P > 0; \\ \vec{V} \nabla h &= 0, \quad P \leq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $K(\varphi - \varphi')$ – функция податливости, не зависящая от распределения давления в слое, но учитывающая геометрические и упругие свойства контактирующих материалов [11].

Заметим, что уравнение (7) учитывает эффект кавитации (вспенивания) для отрицательного давления.

Важно отметить, что вязкость смазочного слоя μ сильно зависит от температуры T и давления P . Существуют множество эмпирических моделей изменения вязкости жидкого слоя [12; 13], однако наиболее точной из них является формула Петрусевича, которая аппроксимирует зависимость вязкости от температуры и давления в экспоненциальном виде:

$$\mu(P, T) = \mu_0 \exp(\alpha P - \Omega_0 T), \quad (8)$$

где α – пьезокоэффициент, характеризующий изменение вязкости в зависимости от давления; μ_0 – динамическая вязкость при $P = 0$; Ω_0 – так называемый коэффициент крутизны вискограммы.

Тепловой расчет. Расчет мощности тепловыделения Q для подшипника скольжения, работающего в гидродинамическом режиме, определяется выражением

$$Q = \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{h} V^2. \quad (9)$$

Запишем уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) можно представить в виде разложения Фурье:

$$T = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)] + T_0. \quad (11)$$

На внутренней границе при $r = R_l$ имеем граничное условие для потока тепла из смазочного слоя:

$$Q = -\chi \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (12)$$

где Q – мощность тепловыделения в смазочном слое, определяемая формулой (9). Функцию мощности тепловыделения также разлагаем по Фурье гармоникам:

$$Q = \Theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\Theta_k \cos(k\varphi) + \Theta_k^* \sin(k\varphi)], \quad (13)$$

$$\Theta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \Theta_k^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad \Theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) d\varphi.$$

На внешней границе задаем температуру окружающей среды T_0 :

$$T(R_3) = T_0. \quad (14)$$

Применяя разложение Фурье к формуле (12), получаем уравнения:

$$-\chi \frac{\partial a_k}{\partial r} = \Theta_k, \quad -\chi \frac{\partial b_k}{\partial r} = \Theta_k^*. \quad (15)$$

Здесь коэффициенты a_k, b_k удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_k}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} a_k = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b_k}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} b_k = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_0}{\partial r} \right) = 0. \quad (16)$$

Решая уравнения (16), определяем коэффициенты a_k и b_k :

$$a_{k,j} = \Theta_{k,j} \tilde{a}_k, \quad b_{k,j} = \Theta_{k,j}^* \tilde{a}_k, \quad (17)$$

$$\tilde{a}_k = -\frac{R_3}{k} \frac{1}{\chi \left[\left(\frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]} \left[\left(\frac{R_1}{R_3} \right)^k - \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^k \right], \quad \tilde{a}_0 = \frac{R_1}{\chi} \ln \frac{R_3}{R_1}.$$

Нестационарная нагрузка. При резких изменениях внешней нагрузки F возникают возмущения скорости центра масс, вызывающие нестационарные изменения толщины жидкого слоя и распределения давления в зоне контакта. Это приводит к изменению силовой реакции жидкого слоя на внешнюю нагрузку, связанной с давлением уравнением

$$\vec{W} = \int P \vec{N} dx'. \quad (18)$$

При малых возмущениях скорости центра масс уравнение (18) можно представить в виде разложения

$$\vec{W} = \vec{W}_0(\vec{x}_c) - \vec{\lambda} \dot{\vec{x}}_c. \quad (19)$$

Здесь левая часть уравнения учитывает стационарную несущую способность W_0 , а правая – возмущение скорости центра масс, тензорный коэффициент λ представляет собой матрицу коэффициентов демпфирования слоя. Данные коэффициенты определяют релаксацию давления в смазочном слое при нестационарных переходных процессах. Найденные функции стационарной несущей способности и коэффициентов демпфирования позволяют записать уравнение динамики тела в следующем виде:

$$M \ddot{\vec{x}}_c + \vec{\lambda} \dot{\vec{x}}_c - \vec{W}_0(\vec{x}_c) = -F. \quad (20)$$

Выше изложенный метод позволяет находить самосогласованное нестационарное решение задачи упругогидродинамического взаимодействия тел с любыми геометрическими параметрами и учетом их деформации. На основе данного метода написана программа (подробнее [14]), которая позволяет эффективно вычислять самосогласованное распределение давления в смазочном слое подшипника качения, но, изменяя в ней уравнение зазора в смазочном слое для другого вида контакта, программа становится универсальной.

Сравнение предлагаемого метода расчета с CAD/CAE программами. Расчет смазочного слоя подшипника скольжения (рис. 1) по изложенному выше методу сравниваем с аналогичным расчетом с использованием программного комплекса ANSYS, основанного на методе конечных элементов. Блок-схема расчета для обоих методов представлена на рис. 2.

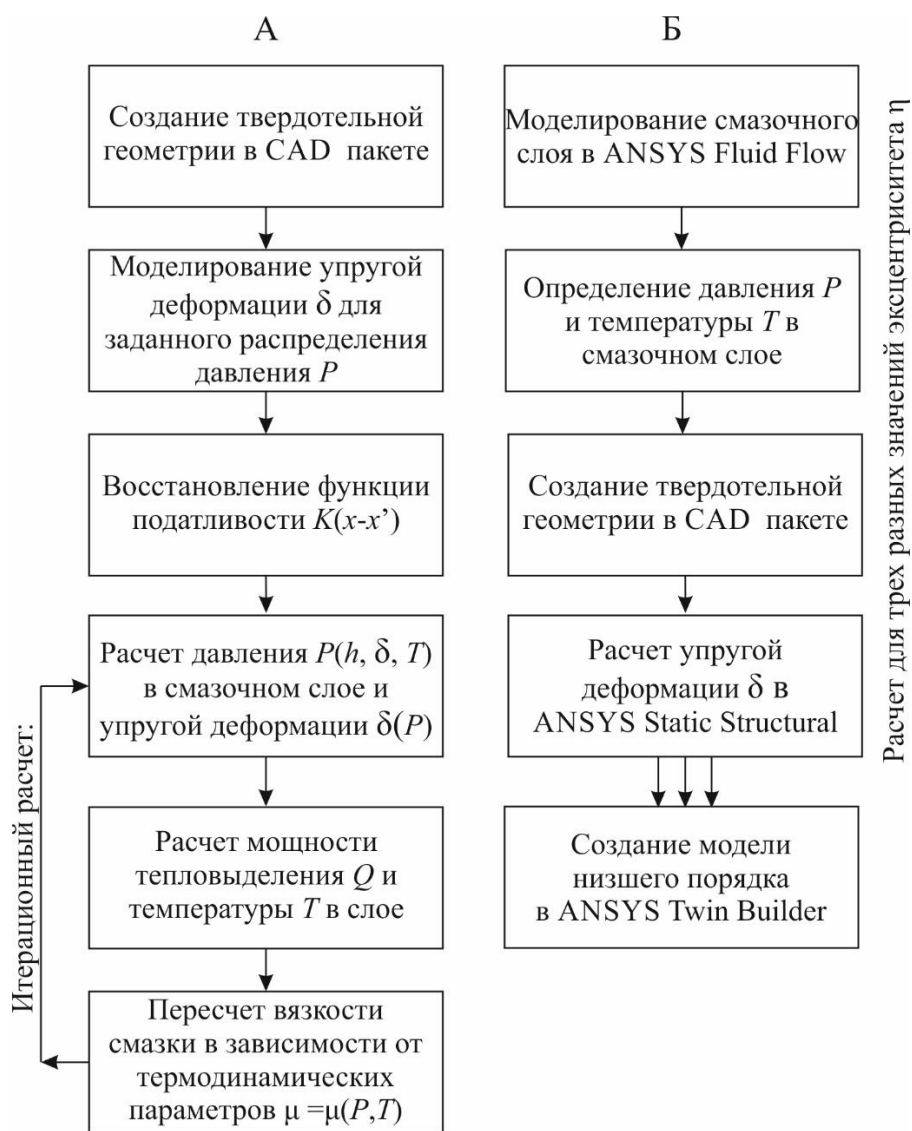


Рис. 2. Блок-схема методов расчета подшипника скольжения; А – предлагаемый «гибридный метод»; Б – методика расчета в ANSYS

Fig. 2. A flowchart of methods for calculating a plain bearing; А – the proposed "hybrid method"; Б – calculation method using ANSYS

Рассмотрим рис. 2 более детально. На первом этапе «гибридного» метода моделируем упругий прогиб подшипника скольжения в программе ANSYS (можно использовать любую другую расчетную программу, это не принципиально) и в качестве нагрузки задаем произвольное распределение давления вдоль поверхности. В результате расчета определяем упругий прогиб вкладыша. На этом использование сложных CAD/CAE программ заканчивается.

Далее, зная распределение давления в смазочном слое и соответствующие упругие деформации, восстанавливаем функцию податливости по методу, описанному выше. После этого переходим к итерационному расчету смазочного слоя [14], который учитывает переменную вязкость смазки, эффект кавитации, изменение температуры в слое и деформацию упругой поверхности. Важно отметить, что данный алгоритм легко реализуется практически в любой программной среде и достаточно быстро и точно производит расчет для любых значений нагрузок и эксцентриситетов.

При выполнении полного расчета в пакете ANSYS сначала нужно смоделировать смазочный слой в ANSYS Fluid Flow, что на первый взгляд не должно вызывать сложностей. Но при значениях относительного эксцентриситета подшипника больше 0,8 возникают трудности в моделировании, так как значение толщины смазочного слоя становится меньше допустимого (10^{-7} м). При таких значениях большинство CAD/CAE программ выдают ошибку при моделировании и строят поверхность, а не твердое тело. Кроме того, нет возможности в пакетах CAD/CAE учитывать эффект кавитации, что сказывается на максимальном значении давления. С учетом указанных ограничений, моделируем смазочный слой и определяем создаваемое им давление, а также рассчитываем мощность тепловыделения и температуру в смазочном слое.

Далее переходим к моделированию корпуса подшипника, производя те же самые действия, что и при моделировании деформации упругого слоя в «гибридном» методе. Разница заключается лишь в том, что распределение давления по упругому слою импортируется из ранее рассчитанного смазочного слоя. Для перехода к нестационарному расчету нужно произвести расчеты минимум для трех разных смазочных слоев, то есть для трех разных значений относительного эксцентриситета. Полученные результаты импортируем в пакет ANSYS Twin Builder. На основе ранее полученных данных, данный пакет путем численной аппроксимации результатов строит модель подшипника скольжения низшего порядка, которая позволяет в режиме реального времени определять, как изменится прогиб вкладыша и давление в смазочном слое при плавном изменении нагрузки.

Сравним результаты решений (рис. 3), полученные при помощи «гибридного» моделирования и моделирования в пакетах ANSYS и COMSOL Multiphysics [15]. Расчет выполнялся для следующих параметров: $L = 0,125$ м; $R_1 = 0,25$ м; $\mu = 0,19$ Па·с, относительный эксцентриситет $\tilde{\eta} = 0,5$; скорость вращения вала 1000 об/мин.

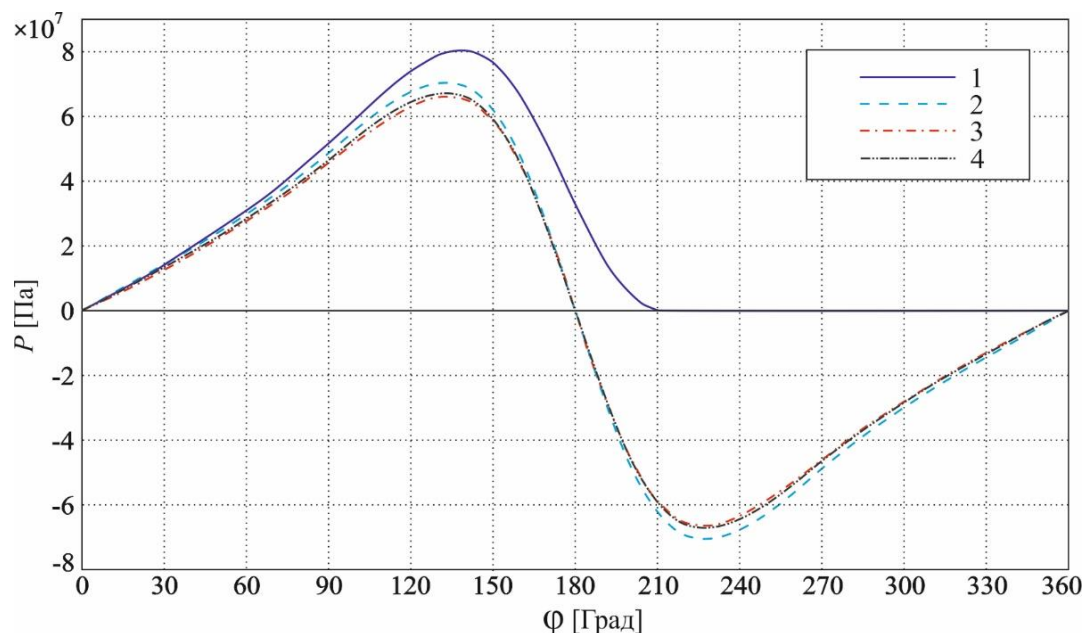


Рис. 3. Давление в смазочном слое подшипника скольжения:
 1 – полуаналитическое решение, учитывающее кавитационный эффект;
 2 – полуаналитическое решение без учета кавитационного эффекта;
 3 – моделирование в COMSOL Multiphysics; 4 – моделирование в ANSYS

Fig. 3. Pressure in the lubricating layer of the plain bearing:
 1 – semi-analytical solution that takes into account the cavitation effect;

- 2 – semi-analytical solution without taking into account the cavitation effect;
3 – modeling in COMSOL Multiphysics; 4 – modeling in ANSYS

Из рис. 3 видно, что расчеты, выполненные в пакетах ANSYS (кривая 4) и COMSOL Multiphysics (кривая 3), показывают одинаковые результаты (различие не более 1 %). При этом оба расчета не учитывают эффект кавитации, что приводит к снижению максимума давления на 15 % по сравнению с «гибридным» методом расчета, учитывающим кавитационный эффект и исключающим возникновение областей отрицательного давления (кривая 1). Результаты расчета с помощью «гибридного» метода без учета кавитации хорошо согласуются с расчетами в CAD/CAE пакетах, расхождение максимальных давлений в слое не превышает 6 %.

Сравнительный анализ описанных выше результатов позволяет сделать вывод, что полуаналитический «гибридный» метод расчета при своей экономичности показывает хорошую точность расчетов. При этом он имеет ряд преимуществ над численными расчетами в CAD/CAE программах. Первым и довольно весомым плюсом является «стоимость расчета». CAD/CAE пакеты, позволяющие провести ряд описанных выше расчетов и обладающие нужным функционалом, имеют очень высокую стоимость, в то же время для «гибридного» моделирования подойдет любой пакет, умеющий проводить статический расчет (например пакет ANSYS Student). Вторым преимуществом «гибридного» моделирования являются невысокие требования к вычислительным ресурсам, в то время как для расчетов в CAD/CAE пакетах требуются мощные компьютеры, которые так же имеют высокую стоимость. Расчетным и самым важным преимуществом «гибридного» моделирования является возможность нестационарного расчета тяжело нагруженной работы подшипника скольжения или иного вида контактного взаимодействия (методика расчета будет отличаться лишь уравнением зазора для конкретного вида контакта). Во-первых, в «гибридном» моделировании возможно задать любой размер минимального зазора без ограничений для сверхтяжелых нагрузок. При этом моделирование в CAD/CAE пакетах имеет ограничение для минимальных значений зазора. Во-вторых, «гибридное» моделирование позволяет учитывать дополнительные важные физические факторы, сильно осложняющие расчет: эффект кавитации, существенно влияющий на пик давления, переменную вязкость смазочного слоя, зависящую от термодинамических параметров, а также резкий рост пика давления в слое при резком скачке нагрузки. В CAD/CAE пакетах этот скачок не учитывается и рост давления происходит плавно от начального значения к новому, соответствующему изменившейся нагрузке.

Заключение. Предложен метод «гибридного» моделирования, позволяющий с минимальными экономическими и расчётными ресурсами производить расчет нестационарного упругогидродинамического контакта с учетом таких факторов, как деформация упругой поверхности, переменная вязкость смазочного слоя и эффект кавитации. Данный метод расчета может использоваться в различных конструкторских или технологических бюро для предварительной оценки проектируемого узла, оптимизации уже существующего, а также создания цифрового двойника эксплуатируемого узла трения и определения условий его нормальной работы в тех или иных условиях.

References

1. Williams J. A. Engineering tribology. New York, Oxford University Press Inc., 1994, 242 p.
2. Hamrock B. J., Schmid S. R., Jacobson B. O. Fundamentals of fluid film lubrication. New York, Marcel Dekker, Inc., 2004, 703 p.
3. Bair S. High-Pressure Rheology for quantitative elastohydrodynamics. *Tribology and Interface Engineering Series*. Elsevier, 2007, 54 p.

4. Szeri A. Z. Fluid film lubrication. Cambridge, Cambridge University Press, 2011, 273 p.
5. Lugt P. M., Morales-Espejel G. T. A Review of elasto-hydrodynamic lubrication theory. *Tribology Transactions*. 2011, Vol. 54, P. 470–496.
6. Galakhov M. A., Usov P. P. *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoy teorii treniya* [Differential and integral equations of the mathematical theory of friction]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 280 p.
7. Borovin G. K., Protopopov A. A. [Calculation of the optimal axial clearance of the semi-open impeller of the low-flow centrifugal pump of the spacecraft thermal control system]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 2013, No. 86, 16 p. (In Russ.).
8. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect tasks]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.
9. Ivanov V. A., Erkaev N. V. [Nostedy oscillations of the roller contacting with riding surface with lubrication layer]. *Vestnik SibGAU*. 2017, Vol. 18, No. 1, P. 50–57 (In Russ.).
10. Terentev V. F., Erkaev N. V., Dokshanin S. G. *Tribonadejnost podshipnikovix uzlov v prisutstvii modificirovanix smazochnix kompozicii* [Tribo-durability of bearing units in a presence of modified lubricant compositions]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 142 p.
11. Ivanov V. A., Erkaev N. V. [Iterative calculation of trubo-contact between a roller and plate]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 4(56), P. 48–54 (In Russ.).
12. Besportochnyy A. I., Galakhov M. A. *Matematicheskoe modelirovanie v tribotekhnike*. [Mathematical modeling in tribology]. Moscow, MFTI Publ., 1991, 88 p.
13. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1980, 304 p.
14. Ivanov V. A. [Program complex of pressure calculation in lubricated slide bearing layer]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2018. Vol. 19, No. 3, P. 540–549 (In Russ.).
15. Ravindra M., Sandeep S. Analysis of hydrodynamic plain journal bearing. Excerpt from the Proceedings COMSOL Conference in Bangalore. 2013.

Библиографические ссылки

1. Williams J. A. Engineering tribology. N.-Y. : Oxford University Press Inc., 1994. 242 p.
2. Hamrock B. J., Schmid S. R., Jacobson B. O. Fundamentals of fluid film lubrication. N.-Y. : Marcel Dekker, Inc., 2004. 703 p.
3. Bair S. High-Pressure Rheology for quantitative elastohydrodynamics // *Tribology and Interface Engineering Series*. Elsevier, 2007. 54 p.
4. Szeri A. Z. Fluid film lubrication. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 273 p.
5. Lugt P. M., Morales-Espejel G. T. A Review of elasto-hydrodynamic lubrication theory // *Tribology Transactions*. 2011. Vol. 54. P. 470–496.
6. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. М. : Наука, 1990. 280 с.
7. Боровин Г. К., Протопопов А. А. Расчет оптимального осевого зазора полуоткрытого рабочего колеса центробежного малорасходного насоса системы терморегулирования космического аппарата // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2013. № 86. 16 с.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1979. 288 с.
9. Иванов В. А. Еркаев Н. В. Нестационарные колебания ролика, контактирующего с твердой поверхностью, при наличии смазочного слоя // *Вестник СибГАУ*. 2017. Том 18, № 1. С. 50–57.
10. Терентьев В. Ф., Еркаев Н. В., Докшанин С. Г. Трибонадежность подшипниковых узлов в присутствии модифицированных смазочных композиций. Новосибирск : Наука, 2003. 142 с.

11. Иванов В. А., Еркаев. Н. В. Итерационный расчет трибоконтакта ролика с пластиной // Вестник СибГАУ. 2014. № 4 (56). С. 48–54.
12. Беспорточный А. И., Галахов М. А. Математическое моделирование в триботехнике. М. : МФТИ, 1991. 88 с.
13. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. : Физматлит., 1980. 304 с.
14. Иванов В. А. Программный комплекс расчета давления в смазочном слое подшипника скольжения // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19, № 3. С. 540–549.
15. Ravindra M., Sandeep S. Analysis of hydrodynamic plain journal bearing // Excerpt from the Proceedings COMSOL Conference in Bangalore. 2013.

© Ivanov V. A., Erkaev N. V., 2020

Ivanov Viktor Andreevich – Cand. Sc., researcher, laboratory of digital twins and big data analysis, Institute of Computational Technologies SB RAS; assistant of Applied mechanics department, Siberian Federal University, Polytechnic Institute. E-mail: Vintextrim@yandex.ru.

Erkaev Nikolai Vasilievich – Dr. Sc., professor, principle research scientist, Institute of Computational Modelling SB RAS; Professor of Applied mechanics department, Siberian Federal University, Polytechnic Institute. E-mail: nerkaev@gmail.com.

Иванов Виктор Андреевич – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории цифровых двойников и анализа больших данных, Институт вычислительных технологий СО РАН; ассистент кафедры прикладной механики, Сибирский федеральный университет, Политехнический институт. E-mail: Vintextrim@yandex.ru.

Еркаев Николай Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН; профессор кафедры прикладной механики, Сибирский федеральный университет, Политехнический институт. E-mail: nerkaev@gmail.com.